

Matemaattisen todistamisen oppimiseen liittyviä tunteita ja asenteita

Johdatus yliopistomatematiikkaan -kurssilaisten koke- muksia

Helsingin yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen osasto

Matematiikan opettaja
Pro gradu -tutkielma
Toukokuu 2020
Oona Pulkkinen
Ohjaajat: Matti Pauna, Jokke Häsä



Tiedekunta - Fakultet - Faculty Matemaattis-luonnontieteellinen		Laitos - Institution - Department Matematiikan ja tilastotieteen	
Tekijä - Författare - Author Oona Pulkkinen			
Työn nimi - Arbetets titel Matemaattisen todistamisen oppimiseen liittyviä tunteita ja asenteita Johdatus yliopistomatematiikkaan -kurssilaisten kokemuksia			
Title			
Oppiaine - Läroämne - Subject Matematiikka/ aineenopettaja			
Työn laji/ Ohjaaja - Arbetets art/Handledare - Level/Instructor Pro gradu -tutkielma / Matti Pauna, Jokke Häsä		Aika - Datum - Month and year 05.2020	Sivumäärä - Sidoantal - Number of pages 89 s. + 8 liites.
<p>Tiivistelmä - Referat - Abstract</p> <p>Tavoitteet. Eräs tapa käsitellä affekteja on jakaa ne uskomuksiin, asenteisiin ja tunteisiin. Aiempien tutkimusten mukaan affektit ovat keskeisessä osassa esimerkiksi matemaattisessa ongelmanratkaisussa suoriutumisessa ja yhteydessä siihen, millaisia tavoitteita opiskelija itselleen asettaa. Affekteja voidaan jäsentää valenssin ja aktivaation kautta. Tässä tutkimuksessa selvitetään, millaisia matemaattiseen todistamiseen liittyviä tunteita opiskelijat tyypillisesti kokevat matematiikan yliopisto-opintojen alkuvaiheessa. Tavoitteena oli jäsentää Johdatus yliopistomatematiikkaan -kurssilaisten todistamiseen liittyviä tunteita valenssin ja aktivaation käsitteiden avulla todistamisen oppimisen kannalta hyödyllisiin ja haitallisiin. Mielenkiinnon kohteena olivat lisäksi keinot, joita opiskelijat käyttivät negatiivisista tunteista selviytymiseen. Kiinnostavaa oli myös, miten opiskelijat raportoimiaan tunteita selittivät, ja muuttuivatko opiskelijoiden näkemykset todistamisesta kurssin kuluessa.</p> <p>Menetelmät. Tämän tutkimuksen kohdejoukkona olivat 440 syksyn 2019 Johdatus yliopistomatematiikkaan -kurssin opiskelijat. Aineisto saatiin Helsingin yliopiston matematiikan ja tilastotieteen osaston matematiikan opetuksen tutkimusryhmältä (vastuullinen tutkija Johanna Rämö) ja se koostui opiskelijoiden kirjallisista avovastauksista kysymykseen: "Millaisia tunteita koet, kun sinun on todistettava jotain matematiikassa?". Opiskelijoiden vastaukset analysoitiin laadullisella aineistolähtöisellä sekä teoriaohjaavalla sisällönanalyysillä.</p> <p>Tulokset ja johtopäätökset. Todistamiseen liittyi paljon erilaisia tunteita, joista suurin osa luokitui tätä tutkimusta ohjanneen teoreettisen viitekehyksen mukaan todistamisen oppimisen kannalta hyödyllisiin. Positiivisia tunteita raportoitiin jonkin verran enemmän kuin negatiivisia tunteita. Myös opiskelijoiden käyttämät keinot negatiivisista tunteista selviytymiselle olivat lähes yksinomaan oppimista edistäviä strategioita. Opiskelijoiden asenteet kurssin kuluessa muuttuivat niin ikään todistamisen oppimisen kannalta edulliseen suuntaan. Yleisimmin koetuista tunteista haaste, mielenkiinto, epävarmuus, turhautuminen sekä vaikeus ja hankaluus painoutuivat todistamisen alkupuolella, ja onnistumista, mielihyvää sekä iloa koettiin, kun todistustehtävä valmistui. Todistustehtävien tekemiseen näyttää opetteluvaiheessa liittyvän vaihtelevia tunteita. Toiseksi eniten mainintoja positiivisten aktivoivien tunteiden jälkeen saivat negatiiviset ei-aktivoivat tunteet, joten haasteeksi jää, miten oppimisen kannalta haitallisia tunteita kokeneiden opiskelijoiden todistamisen oppimista olisi mahdollista edistää massakurssilla.</p>			
Avainsanat - Nyckelord matemaattinen todistaminen, tunteet, asenteet, oppiminen			
Keywords			
Säilytyspaikka - Förvaringsställe - Where deposited Kumpulan tiedekirjasto			

Muita tietoja - Övriga uppgifter - Additional information

Sisällys

1	JOHDANTO	1
2	MATEMAATTISESTA TODISTAMISESTA	3
	2.1 Todistusmenetelmistä	3
	2.2 Todistamisen rooleista	8
	2.3 Todistamiseen liittyvistä haasteista yliopiston johdantokursseilla	10
3	JOHDATUS YLIOPISTOMATEMATIIKKAAN -KURSSI HELSINGIN YLIOPISTOSSA	13
	3.1 JYM-kurssin kuvaus kurssit-sivuston mukaan	13
	3.2 JYM-kurssin kuvaus Moodlessa	14
4	AFFEKTEISTA, TUNTEISTA JA MATEMATIIKASTA	25
	4.1 Affekteista	25
	4.2 Matematiikka ja affektit McLeodin mukaan	28
	4.3 Valenssi ja aktivaatio – Feldman Barrett ja Russell	30
	4.4 Tunteet ja tavoiteorientaatiot	33
	4.5 Erilaisista tunteista ja oppimisstrategioista	39
5	TUTKIMUSTEHTÄVÄ JA TUTKIMUSKYSYMYKSET	43
6	TUTKIMUKSEN TOTEUTUS	44
	6.1 Tutkimuksen kohderyhmä ja tutkimusmenetelmä	44
	6.2 Aineiston analyysimenetelmä	45
7	TUTKIMUSTULOKSET JA NIIDEN TULKINTAA	50
	7.1 Todistaminen ja tunteet Johdatus yliopistomatematiikkaan -kurssilla	50
	7.2 JYM-kurssilaisten todistamisen oppimiseen liittyvien tunteiden eräs jäsenyys – valenssi ja aktivaatio	63
	7.3 Todistamiseen liittyvien asenteiden muutoksista Johdatus yliopistomatematiikkaan -kurssilla	70
	7.4 Tulosten yhteenveto	73
8	LUOTETTAVUUS	75
9	POHDINTAA	78
	LÄHTEET	82
	LIITTEET	90

TAULUKOT

Taulukko 1. Implikaation totuustaulu

Taulukko 2. Ekvivalenssin totuustaulu.

Taulukko 3. Kontrapositiomuodon totuustaulu.

Taulukko 4. Ristiriitatodistuksen logiikkaa vastaavan konditionaaliväitteet totuustaulu.

Taulukko 5. Johdatus yliopistomatematiikkaan -kurssin osaamistavoitteiden osa-alueet.

Taulukko 6. Opiskelijoiden kokemien tunteiden muodostamat alaluokat ja niiden lukumäärällinen esiintyvyys aineistossa.

Taulukko 7. Yleisimmin koetut tunteet ja niihin liittyvien mainintojen lukumäärät.

Taulukko 8. Yleisimmin koetut tunteet jaoteltuna affektien nelikenttämallin mukaisesti.

Taulukko 9. Haasteeseen liittyvät affektit.

Taulukko 10. Todistamisen haasteet.

Taulukko 11. Syitä todistamiseen liittyvään epävarmuuteen.

Taulukko 12. Mielenkiinnon tunteeseen liittyvät affektit.

Taulukko 13. Opiskelijoiden selityksiä kokemalleen turhautumiselle.

Taulukko 14. Opiskelijoiden vastauksista tunteeseen neutraali liitetty luokat.

Taulukko 15. Vaikeuden ja hankaluuden tunteeseen liittyvät todistamisen tilanteet.

Taulukko 16. Selitys vaikeuden ja hankaluuden tunteelle.

Taulukko 17. Onnistumisen tunteeseen liittyvät todistamisen tilanteet.

Taulukko 18. Onnistumisen tunteeseen liittyvät affektit.

Taulukko 19. Voimakkaaseen mielihyvään liittyvät todistamisen tilanteet ja affektit.

Taulukko 20. Ilon tunteeseen liittyvät, opiskelijoiden vastauksista tulkitut selitykset.

Taulukko 21. Todistamiseen liittyvien asenteiden muutosta kuvaavien vastausten jakautuminen syksyn 2019 Johdatus yliopistomatematiikkaan -kurssilla.

KUVAT

Kuva 1. I induktioperiaate.

Kuva 2. II induktioperiaate.

Kuva 3. Kunkin tehtävätyypin osuus hyväksyttävälle kurssisuoritukselle.

Kuva 4. Johdatus yliopistomatematiikkaan -kurssin osaamistavoitteet joukko-opissa.

Kuva 5. Symbolinen logiikka.

Kuva 6. Todistustekniikat ja arvosanaan 1-2, 3-4 ja 5 vaadittavat taidot.

Kuva 7. Matematiikan lukeminen ja kirjoittaminen.

Kuva 8. Matemaattinen keskustelu.

Kuva 9. Matemaattikkoidentiteetin rakentuminen

Kuva 10. Tehtäväviikkojen uusien aiheiden aikataulu ensimmäisessä periodissa.

Kuva 11. Tehtäväviikkojen uusien aiheiden aikataulu toisessa periodissa.

Kuva 12. Feldman Barrettin ja Russellin malli affektiivisesta kentästä.

Kuva 13. Linnenbrinkin ja Pintrichin käsitteellinen malli affektien ja tavoitteiden yhteydestä.

Kuva 14. Linnenbrinkin (2007) malli motivaatiosta, affekteista ja sitoutumisesta.

Kuva 15. D'Mellon ja Graesserin malli affektiivisten tilojen vaihtelusta monimutkaisen oppismistapahtuman aikana.

Kuva 16. Opiskelijoiden kokemat tunteet nelikentässä.

Kuva 17. Tunteiden lukumäärä nelikentissä.

Kuva 18. Nelikenttien tunteiden saamien mainintojen yhteenlaskettu lukumäärä.

Kuva 19. Hyödyllisten ja haitallisten tunteiden saamien mainintojen yhteenlaskettu lukumäärä.

Kuva 20. Positiivisten ja negatiivisten tunteiden saamien mainintojen yhteenlaskettu lukumäärä.

Kiitokset

Kiitos Johanna Rämölle, joka graduseminaarin ohjaajana ymmärsi tavoitteeni valmistua, ja esitti ajatuksen valmiin aineiston käytöstä tutkielman jouhevan aloituksen edistämiseksi. Suuri kiitos myös ohjaajilleni Matti Paunalle ja Jokke Hälsälle, jotka ovat tukeneet ja antaneet kannustavaa ja kehittävää palautetta tämän poikkeuksellisen kevään 2020 graduprosessini aikana.

Haluan kiittää myös rakasta perhettäni kestävydestä ja ymmärryksestä tutkielman teon, sekä oikeastaan koko tutkinnon suorituksen kaikissa vaiheissa!

1 Johdanto

Eräs matematiikan tärkeimmistä ominaispiirteistä on todistaminen. Ennen yliopistoa, koulumaailmassa, matematiikka näyttäytyy useimmiten visuaalisten representaatioiden ja symbolisten laskujen yhdistelmänä. Yliopistoon siirryttäessä matematiikassa painottuvat aksiomaattinen järjestelmä ja matemaattinen todistaminen. Näin ollen matematiikan opintojen aloitus yliopistossa voidaan nähdä siirtymävaiheena matemaattisen ajattelun kannalta, formalismin tullessa kehollisuuden ja symbolismin rinnalle. (Tall, 2008.) Todistamisen oppimisen on todettu olevan haastavaa (esim. Cupillari, 2011; Dreyfus, 1999; Moore 1994), ja Hersh (1993) argumentoi todistuksilla olevan opiskelijoihin usein enemmänkin emotionaalinen kuin intellektuaalinen vaikutus. Hänen mukaansa on ongelmallista, mikäli ohjaaja ei kykene avaamaan ja selittämään todistuksen merkitystä ja tarkoitusta muutoin kuin toteamalla sen kuuluvan matematiikkaan. Todistamisen oppiminen on kuitenkin olennaista matematiikan yliopisto-opinnoissa, sillä todistaminen on tieteenalan tiedonmuodostuksen keskiössä.

Opeteltaessa uusia asioita ja taitoja ovat kognitiivisten kykyjen lisäksi tärkeässä asemassa myös erilaiset koetut affektiiviset tekijät, kuten tunteet. Tunteet vaikuttavat opiskelijan oppimiseen ja saavutuksiin tarkkaavaisuuden suuntaamisen, motivaation, oppimisstrategioiden valinnan ja oppimisen itsesäätelyn kautta (Pekrun, 2014). Tunteet tietenkin vaihtuvat yksilöllä nopealla tahdilla hetkestä toiseen, mutta toistuvan tunnekokemuksen tietyssä tilanteessa ajatellaan virittävän pohjan yksilön asenteille ja uskomuksille, jotka puolestaan ovat luonteeltaan pysyvämpiä (McLeod, 1992). Matematiikan opetuksen kontekstissa affekteista on tutkittu muun muassa matematiikka-ahdistusta sekä asenteita matematiikkaa kohtaan (Zan, Brown, Evans & Hannula, 2006).

Vähemmälle huomiolle affektien ja matematiikan yhteydessä ovat jääneet tunteet (McLeod, 1992; Zan ym., 2006). Kuitenkaan niiden merkitystä oppimisessa ei sovi vähätellä. Tunteet värittävät arjen kokemusmaailmaa, ja ne ovat kehittyneet evoluutiossa luomaan elämään merkityksellisyyden kokemuksia (Bower, 1992). Jokaisen matematiikan ystävän voisi arvella kohdanneen niin turhautumista kuin suuria oivalluksia – ja kaikkea siltä väliltä. Olen itse hyvin tunneherkkä

ihminen; koen tunteet usein hyvin voimakkaina ja kokonaisvaltaisina elämyksinä. Tämä on vaikuttanut myös matematiikan opiskeluuni, jossa uusien asioiden kohtaaminen tuntuu aina yhtä jännittävältä ja hämmentävältä. Koen myös turhautumista oman osaamattomuuteni äärellä uusia matemaattisia käsitteitä ja taitoja harjoitellessani. Sinnikkään harjoittelun avulla hankitut opitut taidot, tai äkilliset oivallukset ja ahaa-elämykset tuottavat minulle kuitenkin suunnatonta onnea ja hilpeyttä. Tällaisia palkitsevuuden tunteita ei omalla kohdallani ole liittynyt oikeastaan mihinkään muuhun oppiaineeseen koulussa. Ehkä tämä on osaltaan vaikuttanut siihen, että päädyin opiskelemaan matematiikanopettajaksi.

Oppimisen kannalta tunteet ovat siis edellä esitellyn mukaisesti merkityksellisiä; tunteet voivat joko edistää tai hidastaa asian oppimista. Todistamisen oppiminen matemaattisilla aloilla yliopistotasolla on myös potentiaalisesti tunteita herättävä kokemus: oma opiskeluala on valittu ja yliopisto- sekä työura edessä. Tässä tutkimuksessa selvitettiin matemaattisen todistamisen oppimiseen liittyviä tunteita ja niihin liittyviä tekijöitä Helsingin yliopiston Johdatus yliopistomatematiikkaan -kurssilla. Tavoitteena oli selvittää, millaisia tunteita opiskelijat raportoivat kokeneensa ja miten he kokemiaan tunteita perustelivat. Toiseksi haluttiin myös selvittää, voidaanko opiskelijoiden kokemat tunteet nähdä todistamisen oppimisen kannalta hyödyllisinä vai haitallisina kun niitä jaotellaan valenssin ja aktivaa- tion avulla teoriaohjaavalla sisällönanalyysillä, ja miten negatiivisista tunteista selviydyttiin. Viimeisenä kiinnostuksen kohteena oli selvittää, onko opiskelijoiden vastauksista tulkittavissa merkkejä siitä, että asenteet todistamista kohtaan olisivat muuttuneet kurssin kuluessa.

Tutkimus toteutettiin laadullisin menetelmin, analysoimalla syksyn 2019 Johdatus yliopistomatematiikkaan -kurssilaisten avoimia vastauksia kurssikyselyyn, joka kartoitti opiskelijoiden kokemia tunteita matemaattisten todistusten laatimiseen liittyen. Aineistolähtöisellä ja teoriaohjaavalla laadullisella sisällönanalyysillä opiskelijoiden vastauksia luokiteltiin ja analysoitiin luvussa 6 kuvatulla tavalla. Keskeisessä osassa analyysia ohjaavana teoriana käytettiin luvussa 4 tarkemmin kuvailtavaa Feldman Barrettin ja Russellin (1998) affektiivista kenttää kuvaavaa mallia, jonka avulla tässä tutkimuksessa käsitteellistettiin todistamisen oppimisen kannalta *hyödylliset* ja *haitalliset* tunteet.

2 Matemaattisesta todistamisesta

Tässä luvussa käsitellään lyhyesti matemaattista todistamista ja todistamisen eri rooleja, esitellään matemaattisia todistusmenetelmiä, ja pohditaan matemaattisen todistamisen oppimiseen liittyviä haasteita yliopiston johdantokursseilla.

2.1 Todistusmenetelmistä

Seuraavaksi syvennyttään matemaattiseen todistamiseen. *Matemaattisella todistamisella* tarkoitetaan tässä tutkielmassa formaalia, logiikan lakeja noudattavaa, matemaattisin symbolein kirjoitettua todistusta, jossa *oletuksiin* nojaten näytetään tietty *väite* todeksi. Tulemme myös sivuamaan todistamisen käsitettä laajemmassa merkityksessä, jossa se voidaan nähdä epämuodollisen matemaattisen kommunikoinnin ja argumentoinnin välineenä. Tämä puoli todistamisesta korostuu erityisesti matematiikan opiskelijoiden harjoittellessa uusia matemaattisia taitoja.

Täsmällinen todistaminen on matematiikalle tieteenalana ominainen piirre. Krantzin (2007) mukaan juuri todistaminen: logiikan sääntöjä seuraavat, tiettyyn lopputulokseen johtavat päättelyketjut, tekee puhtaasta matematiikasta erityisen. Tässä alaluvussa esitellään erilaisia todistusmenetelmiä, jotta lukija voi saada kuvan siitä, mitä kaikkea matemaattisesta todistamisesta on tarkoitus omaksua ensimmäisellä yliopiston johdantokurssilla Helsingin yliopistossa. Matemaattista todistusta kirjoittaessa usein yhdistellään eri menetelmiä ja niiden käyttöä saman todistuksen sisällä mahdollisimman yksinkertaisen todistuksen luomiseksi; menetelmät eivät siis ole vaihtoehtoisia, vaan toisiinsa luovasti yhdisteltävissä.

2.1.1 Suora todistus

Suora todistus on väittämien ketju, jotka on joko annettu oletuksina tai päätelty aiemmista väittämistä, ja jonka viimeinen väite on lopputulos, joka piti todistaa (Keef, Guichard & Gordon, 2013). Väite on usein annettu ehdon muodossa; ”jos P niin Q ”. Tämän todistusmenetelmän loogisena perustana voidaan nähdä implikaation totuustaulu (taulukko 1), joka on epätosi vain yhdellä rivillä. Jotta jos-niin-muotoinen väite saadaan todistettua, tulee siis osoittaa, että oletuksesta P seuraa välttämättä Q . Jos oletuksesta P seuraa, että Q on epätotta, on päättely P

implikoi Q:n epätosi. (Oinonen, 2016.) Propositiologiikassa tämän muotoiset väitteet tunnetaan nimellä modus ponens (lat. ponere, vahvistaa) tai implikaation eliminaatio, ja se voidaan tiivistää seuraavasti: jos P:stä seuraa Q, ja P on totta, niin myös Q on totta (esim. Cupillari, 2011).

Suoran todistuksen todistusmenetelmä tarjoaa yksinkertaisen tavan todistaa konditionaaliväitteitä (Hammack, 2018), ja se tuleekin tutuksi Johdatus yliopistomatematiikkaan -kurssilla heti kolmannella tehtäväviikolla harjoiteltaessa jos-niin-muotoisten väitteiden todistamista (Moodle, 2019; kts. luku 3, kuva 10). Suoran todistuksen menetelmää edeltää Johdatus yliopistomatematiikkaan -kurssilla kuitenkin kurssin luentomonisteen (Oinonen, 2016) sekä luvussa 3 esiteltävän kurssin aiheiden aikataulun mukaan vastaesimerkin käyttö väitteiden kumoamiselle. Tämä seikka erottaa tässä tarkasteltuja kotimaisia (Oinonen, 2016) ja ulkomaisia (Cupillari, 2011; Hammack, 2018) todistamista käsitteleviä oppimateriaaleja, ulkomaisissa oppimateriaaleissa todistusmenetelmissä lähdetään liikkeelle suoran todistuksen menetelmästä. Jos ja vain jos-muotoisten väitteiden todistamista harjoitellaan JYM-kurssilla tehtäväviikolla 4 (kts. luku 3), ja tämän väitteen loogisena perustana nähtävä ekvivalenssin totuustaulu on esitelty taulukossa 2. Näiden väitteiden todistus muodostuu siis kahdesta ”osasta”, ensin päätellään, että P implikoi Q:n, ja tämän jälkeen vielä toisin päin, eli että Q implikoi P:n. (Oinonen, 2016.)

Taulukko 1. Implikaation totuustaulu

P	Q	$P \rightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Taulukko 2. Ekvivalenssin totuustaulu

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

2.1.2 Epäsuoran päättelyn tyypit: kontrapositiotodistus ja ristiriitatodistus

Väitteen ”jos P niin Q” kontrapositiomuoto on ”jos ei Q niin ei P”. Näiden väitteiden totuustaulut ovat keskenään loogisesti ekvivalentit (vrt. taulukko 1 ja taulukko 3). Kontrapositiolla on siis mahdollista todistaa jos-niin -tyyppiset väitteet olettamalla takajäsenen negaatio, ja päättelemällä etujäsenen negaatio. (Oinonen, 2016.) Käyttämällä kontrapositiota väite saattaa olla joissain tapauksissa helpompi todistaa, kuin suoran todistuksen menetelmällä (Hammack, 2018). Kontraposition käyttöä todistuksissa harjoitellaan Johdatus yliopistomatematiikkaan -kurssin seitsemännellä tehtäväviikolla toisen opiskeluperiodin alussa (Moodle, 2019).

Toinen epäsuoran päättelyn tyyppi on ristiriitatodistus, jolla voidaan todistaa kaiken tyyppisiä väitteitä – ei siis vain konditionaaliväitteitä. Ristiriitatodistuksessa oletetaan väitteen negaatio eli tehdään vastaoletus, ja näytetään, että tämä oletus johtaa mihin tahansa ristiriitaan. Koska väitteen negaatio johtaa mielettömyyteen, on alkuperäisen väitteen oltava tosi. Ristiriitatodistukset esiintyvät JYM-kurssin tehtävissä ensi kertaa viikolla 8, siis kontrapositiotodistusten esiintymistä seuraavalla viikolla (Moodle, 2019). Myös ristiriitatodistuksen logiikkaa voi hahmottaa totuustaulujen avulla, sillä ristiriidan päättely vastaa konditionaaliväitteen ”P:n negaatio implikoi C:n ja ei C:n” todistamista. Tätä havainnollistetaan taulukossa 4, josta näkee, että esitetty konditionaaliväite on loogisesti ekvivalentti väitteen P kanssa. (Hammack, 2018; Oinonen, 2016.)

Taulukko 3. Kontrapositiomuodon totuustaulu

$\neg Q$	$\neg P$	$\neg Q \rightarrow \neg P$
0	0	1
1	0	0
0	1	1
1	1	1

Taulukko 4. Ristiriitatodistuksen logiikkaa vastaavan konditionaaliväitteen totuustaulu

P	C	$\neg P \rightarrow (C \wedge \neg C)$
1	1	1
1	0	1
0	1	0
0	0	0

2.1.3 Vastaesimerkin käyttö

Vastaesimerkin avulla voidaan todistaa jokin, yleensä universaali, väite vääräksi. Siinä näytetään yksittäinen tapaus, jossa annettu väite ei päde. Epätodet väitteet, jotka koskevat esimerkiksi kaikkia kokonaislukuja, reaalilukuja tai joukkoja, on siis mahdollista osoittaa vääräksi konstruoimalla vastaesimerkki. Johdatuskurssilla nämä vastaesimerkin käytön harjoittelua vaativat tehtävät ovat tyypillisesti suhteellisen helposti ratkeavia ja löydettävissä kohtuullisessa ajassa. Näin ei tietenkään ole matematiikan alalla yleisesti. Vastaesimerkin käyttö epätodien väitteiden kumoamisessa onkin JYM-kurssin luentomonisteen (Oinonen, 2016) ensimmäinen alaluku todistustekniikkaa käsittelevässä luvussa. Kurssin aiheiden aikataulun mukaan (Moodle, 2019; kts. luku 3 kuva 10) heti toisella viikolla kurssin tehtävät sisältävät vastaesimerkin käytön harjoittelua.

2.1.4 Matemaattinen induktio

Kun puolestaan halutaan todistaa kaikkia luonnollisia lukuja koskevia paikkansa-pitäviä väittämiä, ei yksittäistapausten tarkasteleminen ole mahdollista. Luonnollisten lukujen joukko on määritelty niin, että se toteuttaa induktioaksiooman, jonka mukaan kaikilla luonnollisilla luvuilla n on seuraaja $s(n)=n+1$. Induktioaksioomasta johdetaan I induktioperiaate (kuva 1), jota käyttämällä voidaan todistaa luonnollisia lukuja koskevia väittämiä.

Lause 4.1.1 (I induktioperiaate). *Oletetaan, että seuraavat ehdot ovat voimassa:*

1. $P(0)$.
2. $\forall n \in \mathbb{N} (P(n) \rightarrow P(n+1))$.

Tällöin $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$.

Kuva 1. I Induktioperiaate. Lähde: Oinonen 2016.

Induktiotodistus koostuu siis kahdesta osasta: *alkuaskeleessa* varmistetaan, että väite pätee nolalla, ja *induktioaskeleessa* osoitetaan väitteen pätevän seuraajalle $k+1$, kun on oletettu k :n olevan luonnollinen luku, jolle väite pätee. Nämä kaksi askelta yhdessä osoittavat, että väite pätee kaikille luonnollisille luvuille. Joidenkin luonnollisia lukuja koskevien väitteiden todistaminen sujuu helpommin II induktioperiaatteen avulla, jossa induktio-oletus poikkeaa hieman I induktioperiaatteen induktio-oletuksesta (kuva 2). (Oinonen, 2016.) Johdatus yliopistomatematiikkaan -kurssilla induktiotodistuksiin perehdytään ensimmäisen kerran viiden kurssiviikon tehtäväsarjassa.

Matemaattinen induktio ei kuitenkaan rajoitu ainoastaan luonnollisiin lukuihin, vaikka Johdatus yliopistomatematiikkaan -kurssin tehtävissä induktiota harjoitellaankin enimmäkseen luonnollisilla luvuilla. *Transfinitiinen* induktio laajentaa matemaattisen induktion ideaa muihin hyvin järjestettyihin joukkoihin, ja on tärkeä todistusmenetelmä muun muassa joukko-opissa ja topologiassa (kts. esim. Suppes, 1972). *Rakenteellinen* induktio puolestaan on eräs olennainen matemaattisen logiikan ja tietojenkäsittelytieteen todistusmenetelmä (esim. Aubin, 1979; Burstall, 1969; Hopcroft, Motwani & Ullman, 2001).

Lause 4.2.1 (II induktioperiaate). *Oletetaan, että seuraavat ehdot ovat voimassa:*

1. $P(0)$.
2. $\forall n \in \mathbb{N} ((\forall j \leq n P(j)) \rightarrow P(n+1))$.

Tällöin $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$.

Kuva 2. II induktioperiaate. Lähde: Oinonen 2016.

2.1.5 Olemassaolotodistukset: konstruktiiiset ja ei-konstruktiiiset

Olemassaolotodistukset jakautuvat konstruktiiisiin ja ei-konstruktiiisiin todistuksiin. Konstruktiiisissa todistuksissa näytetään eksplisiittinen esimerkki, jossa väite pätee. Ei-konstruktiiivinen todistus tai *puhdas olemassaoloteoreema* todistaa esimerkin olevan olemassa sitä kuitenkaan antamatta. (esim. Franklin & Daoud, 1988; Jarden, 1953.) Olemassaolotodistuksiin ei perehdytä Johdatus yliopistomatematiikkaan -kurssilla, mutta niihin törmää muilla yliopiston matematiikan peruskursseilla.

2.1.6 Muut todistusmenetelmät

Edellä kuvattujen todistusmenetelmien lisäksi on olemassa muitakin todistusmenetelmiä, joita tarvitaan opiskeltaessa jotain matematiikan alaa syvällisemmin. Esimerkiksi todennäköisyysteorian menetelmiä hyödyntävät todistukset, tilastotieteelliset todistukset tai tietokoneavusteiset todistukset kuuluvat alakohtaisiin todistusmenetelmiin (kts. esim. Fallis, 1997; Krantz, 2007; Tymoczko, 1979).

2.2 Todistamisen rooleista

Edellä kuvatut erilaisia todistusmenetelmiä koskevat kuvaukset herättävät kunnioitusta matemaatikkoja ja loogikkoja kohtaan, mutta eivät puhu mitään siitä, *miksi* jonkin väitteen todistaminen olisi tavoiteltavaa. Seuraavaksi pohditaan, mitä eri merkityksiä todistamisella voidaan nähdä. Davis ja Hersh (2011, alkuperäinen teos ilmestynyt 1981) esittelevät mielikuvituksellisen dialogin matematiikan professorin, Ihanteellisen Matemaatikon, ja filosofian opiskelijan välillä. Filosofian opiskelijan esittäessä kysymyksen ”Mikä on todistus?”, päätyy professori vastaamaan: ”No, se on argumentti, joka vakuuttaa aihetta tuntevan.” Tarinan Ihanteellisen Matemaatikko siis tunnistaa todistuksen sellaisen nähdessään, mutta ei kykene määrittelemään todistusta, tai viemään kuvailua sen pidemmälle. Davisin ja Hershin kuvitteellinen dialogi ehkä onnistuu tiivistämään jotain oleellista matemaatikkojen ja filosofien ajatusmaailmasta. Mitä Ihanteellisen Matemaatikon kuvaama vakuuttaminen sitten oikein tarkoittaa?

Väitteen todeksi osoittamisen lisäksi todistamisella voidaan matematiikassa nähdä olevan muitakin tärkeitä tehtäviä tai rooleja (Balacheff 1991, Bell 1976, DeVilliers 2010, Hanna 1990, Hersh 1993, Lakatos 2015). Stylianou, Blanton ja Rotou (2015) käsittelevät tutkimuksessaan todistamisen kolmea eri ulottuvuutta; verifikaatiota, selitystä ja kommunikaatiota. He huomauttavat, että todistuksen ymmärtämisen ja todistusta kohtaan olevien uskomusten suhdetta ei ole tutkittu, ja peräänkuuluttavat tutkimusta todistuskäsitysten ja todistamiseen liittyvien asenteiden ja uskomusten suhteesta. Heinze, Reiss ja Franziska (2005) esittävät, että matemaattinen suoritus, ja erityisesti todistusten lukeminen ja kirjoittaminen, on monimutkainen uskomuksista, tiedosta ja kognitiivisista taidoista muodostuva kokonaisuus.

Väitteen todeksi osoittaminen eli verifikaatio on Hannan (1990) mukaan yleisin käsitys todistuksen merkityksestä, ja hän jaotteleeikin matemaattiset todistukset selittäviin ja varmaksi osoittaviin. Matematiikassa todistuksen merkityksenä on oikeutus ja vahvistus, mutta matematiikan opetuksessa todistus toimii selityksenä (Hanna, 1995). Davis ja Hersh (2011) puolestaan luokittelevat yleisimmän todistuskäsityksen eli verifikaation ”naiiviksi näkemykseksi” matematiikasta. Hersh (1993) näkeekin juuri todistusten selittävän roolin tärkeämpänä kuin osoittavan. Moore puolestaan (1994) nostaa esiin kysymyksen selityksen, todistamisen ja ymmärtämisen suhteesta. Myös Sierpinska (1994) analysoi selityksen ja todistuksen epistemologisia eroja matematiikan ymmärtämisen prosessin kannalta, ja hänen mukaansa todistamisen ja selittämisen suhde on läheinen, vaikka niillä onkin muutama keskeinen ero. Ensinnäkin todistus pyrkii lisäämään vakuuttuneisuuden astetta. Selitys puolestaan ei tähtää tällaiseen ”positiivisempaan” väitteen hyväksymiseen. Toiseksi selittävä diskurssi on enemmänkin metamatemaattinen kuin matemaattinen, sillä selitykset sisältävät esimerkkejä, malleja ja visualisointeja ilmaistaakseen jotain matematiikasta. Tässä mielessä selitys siis menee pidemmälle kuin todistaminen. Dreyfusin (1999) mukaan todistus voi myös tarvita tuekseen selitystä, joka kiinnittää huomion todistuksen keskeiseen ideaan. Täten ymmärtämisprosessissa ovat läsnä sekä todistus että selitys.

Kolmas ulottuvuus Stylianou ym. (2015) tutkimuksessa todistamiseen liittyen on kommunikaatio. Sillä tarkoitetaan yksittäisten matemaatikoiden välistä vuorovaikutusta, joka tapahtuu matematiikkaa tehdessä, ja sisältää kyseisten käsitteiden merkityksestä neuvottelun lisäksi kriteeristön hyväksyttävälle argumentille.

Hanna (1989) näkee tämän ”sosiaalisen neuvottelun” hyvin tärkeänä matemaattiselle yhteisölle.

Stylianou ym. (2015) esittävät, että kypsän todistamiskäsityksen tulisi sisältää kaikki kolme todistamisen roolia, ja toteavat, että opiskelijoilla todistamiskäsitys ”verifikaation välineenä” on valitettavan yleinen. Dreyfus (1999) huomauttaa, että suurin osa yläkoulu- ja lukioikäisistä ei tiedä, mikä matemaattinen todistus on ja mitä sillä saavutetaan. Hän haastaakin matematiikan koulutuksen parissa työskentelevät kiinnittämään tietoisesti huomiota todistuksen, argumentoinnin ja selittämisen eroihin, ja selventämään itselleen, mitä oppilailta tai opiskelijoilta kulloinkin on kohtuullista vaatia.

Monet Johdatus yliopistomatematiikkaan -kurssin opiskelijat tulevat kurssille koulumatematiikka taustanaan. Yliopiston aloitus voidaankin nähdä transitiiovaiheena, jossa opiskelijoille aukeaa kokonaan uusi maailma matematiikasta (Tall, 2008). Tämän tutkimuksen kannalta ymmärrys opiskelijoiden todistamiskäsityksistä on merkittävä, sillä voi hyvin olla, että se, miten laajassa merkityksessä opiskelija todistamisen näkee, vaikuttaa hänen matemaattista todistamista kohtaan kokemiinsa tunteisiin ja asenteisiin.

2.3 Todistamiseen liittyvistä haasteista yliopiston johdanto-kursseilla

Formaalin, loogisesti etenevän todistuksen kirjoittamisen takana on paljon ajatustyötä. Vakuuttavan todistuksen laatiminen vaatii paljon myös matematiikan yliopisto-opiskelijoilta, eikä taito ole itsestäänselvyys läheskään kaikille matematiikan peruskurssien alussa yliopistossa. Moore (1994) mainitsee, että jopa triviaalit todistukset ovat usein haasteellisia matematiikan pääaineopiskelijoille. Dreyfus (1999) esittelee kattavasti todistamiseen liittyviä hankaluuksia, ja pyrkii selventämään, miksi opiskelijoilta ei voi odottaa matemaattikon käsitystä matemaattisista todistuksista, tai niiden käytöstä ja tarkoituksista. Hänen mukaansa jopa menestyneiden opiskelijoiden kriteerit hyväksyttävään selitykseen johonkin tehtävään

eroavat opettajien kriteereistä. Hän antaa esimerkin, jossa opiskelija selittää tehtävän ratkaisua vaiheittaisilla teoilla tai tapahtumilla, eikä luo kuvaa asioiden yhteyksistä ja seurauksista.

Dreyfusin (1999) mukaan aloittelijan käsitteellisen tiedon jäsentymättömyys yhdistettynä kokemattomuuteen luo hankalan lähtökohdan todistamiseen ryhtymiselle. Lisäksi opiskelijoiden ja opettajien näkemykset siitä, mikä on riittävää tai mikä on hyväksyttävä selitys, saattavat erota toisistaan voimakkaasti. Esimerkiksi ensimmäisen vuoden lineaarialgebran opiskelijoilla on Dreyfusin mukaan vaikeuksia erottaa toisistaan ytimekkyys ja vaillinainen vastaus; tyypillisesti opiskelijat valittavat joutuessaan ”kirjoittamaan”, ja toisaalta selityksenä saatetaan tarjota itse väite, tai pelkkä laskutoimitus ilman selitystä. Opiskelijat saattavat sortua myös kirjoittamaan liikaa epärelevantteja asioita ja vastauksessa esitettyjen asioiden järjestys saattaa olla epälooginen. Dreyfusin mukaan aloittelevan matemaatikon hankaluudet argumentteihin ja selityksiin liittyen johtuvat kahdesta asiasta. Käsitteellinen selkeys puuttuu, jolloin argumentointi ei ole johdonmukaista. Lisäksi aloittelijoilla on ollut vain niukasti mahdollisuuksia oppia matemaattisen selityksen tyypillisiä ominaisuuksia. Myös Finlow-Bates, Lerman ja Morgan (1993) toteavat, että ensimmäisen vuoden opiskelijoilla oli vaikeuksia seurata päättelyketjuja, ja opiskelijat käyttivät matemaattisten argumenttien arviointiin empiirisiä tai esteettisiä keinoja, loogisen päättelyn vakuuttavuuden pohtimisen sijaan.

Dreyfus (1999) listaa myös oppimateriaalit yhtenä syynä todistamisen oppimisen vaikeuteen. Vaikka oppikirjat ovat usein muodollisempia kuin opetustilanteissa esitetyt todistukset, tuottaa asioiden esitysjärjestys monesti hankaluuksia. Oppikirjoissa on vaikea välittää opiskelijalle sitä, että ideat nousevat usein samanaikaisesti, eivätkä peräkkäin tietyssä järjestyksessä. Myös yleinen ilmaus ”nähdään helposti” ei ole ongelmaton. Mitä kaikkea on sallittua nähdä?

Dreyfusin mielestä ongelmana on myös se, että muutos intuitiivisen ja formaalein askelein todistamisen välillä ei ole riittävän selvästi ilmaistu, jolloin opiskelijalle jää liikaa tulkinnanvaraa todistamiseen liittyen. Omalta kohdalta muistan syksyllä 2016 käydessäni Lineaarialgebran kursseja, kuinka tämä ero tehtiin meille opiskelijoille selväksi luennoilla tuomalla opetukseen kuhunkin tilanteeseen sopivaa rekvisiittaa. Kurssin luennoitsijan ja vastuuopettajan Johanna Rämön ”saa sotkea -takki” ja ”todistushattu” alleviivasivat tätä eroa mieleenpainuvalla tavalla.

Dreyfusin ajatukset todistamisen oppimiseen liittyvistä hankaluuksista antavat mahdollisuuden tässä tutkimuksessa pohtia lisää syitä mahdollisesti todistamiseen liittyvien hankalien tunteiden takana. On mielenkiintoista tutkia, vieläkö kaksikymmentä vuotta artikkelin julkaisemisen jälkeen samat asiat todistamisen opettelussa tuottavat opiskelijoille vaikeuksia. Ainakin oppimateriaalit ovat kehittyneet, ja automaattisen palautteen tietokonetehtävien voi osaltaan nähdä auttavan esimerkiksi oppikirjoihin liittyvää Dreyfusin mainitsemaa staattisuuden ongelmaa.

3 Johdatus yliopistomatematiikkaan -kurssi Helsingin yliopistossa

Helsingin yliopiston Kurssit (2019) esittelee Johdatus yliopistomatematiikkaan -kurssin (JYM) kohderyhmää, esitietovaatimuksia, osaamistavoitteita, sisältöä, opetusmenetelmiä, oppimateriaalia ja arviointia lyhyesti. Kyseessä on siis kurssin verkossa oleva esittelysivu, ja samalla sivustolla esitellään Helsingin yliopiston muitakin kursseja. Helsingin yliopiston virtuaalinen oppimisympäristö Moodle (2019) esittelee samoja teemoja kattavammin, ja sieltä löytyy kaikki Johdatus yliopistomatematiikkaan -kurssin suorittamisen kannalta oleellinen informaatio. Seuraavaksi tutustutaan tarkemmin tähän Helsingin yliopiston matemaattisten tieteiden kandidaatin tutkintoon tähtäävän koulutusohjelman ensimmäiseen matematiikan perusopintojen kurssiin, Johdatus yliopistomatematiikkaan.

3.1 JYM-kurssin kuvaus kurssit-sivuston mukaan

Vaikka opintojakso Johdatus yliopistomatematiikkaan kuuluu matematiikan perusopintoihin, se on tarjolla myös muiden koulutusohjelmien opiskelijoille. Edeltävänä osaamisena opiskelijoilla tulisi olla lukiomatematiikka, mutta yliopisto tarjoaa myös Lukiomatematiikan kertauskurssin, mikäli opiskelija kokee tarvetta vahvistaa taitojaan. Johdatus yliopistomatematiikkaan on viiden opintopisteen laajuinen, ja kurssi kestää kaksi periodia; se tarjotaan syksyisin 1. ja 2. periodissa, ja keväisin 3. ja 4. periodissa. Ajoitukseltaan kurssi poikkeaa muista matematiikan perus- ja aineopintojen kursseista, joissa viisi opintopistettä suoritetaan yleensä yhden periodin aikana. Täten kurssin voi nähdä ”työläänä” keston ja opintopisteiden määrän suhteen. Toisaalta pitkä kesto mahdollistaa opiskelijan ajattelun kypsymisen.

Osaamistavoitteiksi ja kurssin sisällöksi Helsingin yliopiston Kurssit (2019) antaa seuraavat: ”*Joukko-opin perusteet merkintätapoineen sekä erityyppiset todistustekniikat. Matemaattinen ajattelu sekä suullinen ja kirjallinen viestintä*”. Olen-

naista oppimisen kannalta ovat viikoittaiset harjoitustehtävät, joihin on tarjolla ohjausta. Lisäksi kurssiin kuuluu luentoja, ja kurssin virallinen oppimateriaali on Oinosen (2016) Johdatus yliopistomatematiikkaan-moniste. Arvioinnista kerrotaan lyhyesti: ”*Opiskelijan osaamista arvioidaan kurssin aikana. Kurssi arvioidaan asteikolla 0-5*”. (Helsingin yliopiston Kurssit 2019.)

3.2 JYM-kurssin kuvaus Moodlessa

3.2.1 Kurssikuvaus

Helsingin yliopiston virtuaalisen oppimisympäristön Moodlen (2019) kurssikuvaus on hieman tarkempi kuin Kurssit-sivuston ilmoittamat sisällöt ja tavoitteet. Moodlessa kurssin tavoitteeksi ilmaistaan lukiomatematiikan ja yliopistomatematiikan välisen kynnyksen madaltaminen, sekä matemaattisten aineiden opiskelun tukeminen jatkossakin. Tätä mainintaa ei sisälly Kurssit-sivuston kurssikuvaukseen, jossa kurssin sisältö ja tavoitteet ovat samat. Joukko-opin perusteet ja merkintätavat, erilaiset todistustekniikat, sekä matemaattinen ajattelu, suullisen ja kirjallisen viestinnän ohella, ovat kurssin tärkeimmät sisällöt. Lisäksi Moodlessa mainitaan, että kurssilla käsitellään logiikan alkeita, ja kompleksilukuja tai tietojenkäsittelytieteessä hyödyllisiä matematiikan sisältöjä opiskelijan oman valinnan mukaan.

Moodlen kuvauksessa tiedotetaan kurssin soveltavan opetuksessa tehostetun kisällioppimisen menetelmää, ja teksti sisältää linkin menetelmästä kertovaan blogikirjoitukseen (kts. <https://blogs.helsinki.fi/kumpulaopettaa/2019/02/07/tehostettu-kisallioppiminen-2/>). Kuvauksessa todetaan lopuksi, että syksyn 2019 kurssilla ei ole tenttiä, vaan arviointi perustuu moniin erilaisiin harjoituksiin. Arvioinnista kerrotaan tarkemmin luvussa 3.2.3.

3.2.2 Kurssin tehtävätyypit

Kurssi sisältää erilaisia tehtävätyyppejä, joilla on kullakin oma tarkoituksensa kokonaisuuden kannalta. Nämä tehtävätyypit esitellään Moodlessa (2019). Seuraavaksi esitellään lyhyesti eri tehtävätyypit. Niiden tunteminen on oleellista, sillä

koko kurssin suoritus perustuu tehostetun kisällioppimisen menetelmän mukaisesti tehtävien tekemiseen. Tehostetun kisällioppimisen menetelmästä kerrotaan tarkemmin luvussa 3.2.4.

Johdatus yliopistomatematiikkaan -kurssin suorituksen koostuminen monista erisista voisi kuvitella vaativan opiskelijalta hyviä metataitoja, kuten toiminnanohjausta ja itsesäätelyä omaan opiskeluun liittyen. Lisäksi kurssin käytännön toteutuksella aina palautusajankohdista eri tehtävätyypeistä ansaittaviin pisteisiin asti saattaa olla merkitystä koettujen affektien kannalta. Tämän vuoksi kurssia esitellään melko perusteellisesti ja yksityiskohtaisesti. Halutessaan lukija voi vielä perehtyä tarkemmin eri tehtävätyyppien kerryttämiin kurssipisteisiin, arviointiin sekä tehtävien palautusajankohtiin liitteeseen 1 koottujen taulukoiden avulla.

Tietokonetehtävät

Moodlessa kerrotaan tietokonetehtävien sisältävän pääosin helppoja, uusiin aiheisiin tutustuttavia tehtäviä. Tietokonetehtäväsarjaan kuuluu myös opittua tietoa syventäviä ja soveltavia, opiskelijaa haastavia tehtäviä. Oikein suoritetusta tietokonetehtävästä saa yhden pisteen, ja jokaista tehtävää saa yrittää uudestaan niin monta kertaa kuin haluaa. Jokaisella yrityskerralla maksimipistemäärä putoaa 10%, joten arvailu ei ole suositeltavaa. Tietokonetehtävistä saa automaattista palautetta. Tehtäviä on koko kurssin aikana yhteensä noin sata, ja hyväksyttävään kurssisuoritukseen vaaditaan puolet pisteistä tietokonetehtävien osalta.

Kirjalliset tehtävät

Kirjalliset tehtävät voi tehdä kynällä ja paperilla ja muuttaa palautusta varten pdf-tiedostoksi, tai ne voi kirjoittaa myös Latex-ladontaohjelmalla. Tehtävien palautuskansioon palauttamisen lisäksi opiskelijoiden tulee merkitä tehtävät tehdyksi kunkin viikon kohdalta. Molemmat, palautus ja merkintä tulee tehdä ennen aikarajan umpeutumista. Merkityn tehtävän ei tarvitse olla oikein, mutta sitä on täytynyt yrittää tosissaan. Ratkaisuehdotuksista opiskelijan on mahdollista tarkistaa omaa ratkaisuaan. Lisäksi apua on mahdollista pyytää ohjaajilta. Jokaisesta tehdyksi merkitystä ja palautetusta tehtävästä saa yhden pisteen, mutta tehtävistä, jotka ohjaajat tarkistavat, on mahdollista saada kaksi pistettä. Ohjaajan palautteen mukaan tehtävää on mahdollista korjata ja palauttaa uudelleen kaksi kertaa. Pisteet saa, kun ohjaaja on hyväksynyt tehtävän.

Kirjallisissa tehtävissä harjoitellaan kurssin tavoitteena olevaa matemaattista kirjoittamista, minkä vuoksi opiskelijoita muistutetaan Moodlessa kiinnittämään erityistä huomiota perusteluihin ja ratkaisun kirjoitusasuun. Kirjallisia tehtäviä on koko kurssin aikana yhteensä noin kolmekymmentä. Hyväksytyyn suoritukseen vaaditaan puolet kirjallisten tehtävien pisteistä.

Erikoisalue tehtävät

Kurssin toisessa periodissa tietokonetehtävät sisältävät kompleksilukuihin tai tietojenkäsittelytieteeseen liittyviä erikoisalue tehtäviä. Näistä voi halutessaan tehdä molemmat, mutta pisteitä voi saada vain toisesta alueesta. Jos opiskelija on tehnyt molemmat erikoisalue tehtävät, merkitään hänelle pisteet siitä alueesta, josta hän on saanut paremmat pisteet. Kurssin aikana on yhteensä noin kaksitoista erikoisalue tehtävää, joiden pisteistä on saatava vähintään puolet hyväksytyä kurssisuoritusta varten.

Sovellustehtävät ja vertaisarviointi

Sovellustehtävät ovat laajempia, vertaisarvioitavia tehtäviä. Ohjaajat pisteyttävät tehtävät työn tason mukaisesti. Kurssin lopun sovellustehtävän palauttaminen ja rakentavan vertaispalautteen antaminen on pakollista kurssin hyväksyttävän suorittamisen kannalta. Sovellustehtäviä kuului kurssiin syksyllä 2019 yhteensä kaksi kappaletta; ensimmäisen periodin lopussa sovellustehtävän harjoitustehtävä, ja kurssin lopussa varsinainen sovellustehtävä.

Itsearviointitehtävät

Itsearviointiharjoitusten tekeminen kuuluu kurssiin, mutta niitä ei arvostella. Arvioinneista saa yhden pisteen. Kolmesta itsearviointiharjoituksesta kaksi on palautettava hyväksytyn kurssisuorituksen saamiseksi.

Kuvassa 3 näkyy vielä hyväksytyyn kurssisuoritukseen vaadittava osuus eri tehtävätyypeistä.

- 50 % tietokonetehtäpisteistä
- 50 % kirjallisista pisteistä
- 50 % erikoisaluepisteistä
- 2 itsearviointiharjoitusta huolellisine perusteluineen
- kurssin lopun sovellustehtävän palauttaminen
- rakentavan vertaispalautteen antaminen kurssin lopun sovellustehtävään
- kurssikyselyihin vastaaminen.

Kuva 3. Kunkin tehtävätyypin osuus hyväksyttävälle kurssisuoritukselle. Lähde: Moodle 2019.

3.2.3 Kurssin aikataulu, kurssipisteet ja arvostelu

Kurssin luentoja järjestettiin syksyllä 2019 ensimmäisessä periodissa kahtena päivänä viikossa, yhteensä kolme 45 minuutin luentoa. Toisessa periodissa kurssin luennot järjestettiin yhtenä päivänä viikossa, kaksi 45 minuutin luentoa. Ohjausta kurssitehtäviin oli tarjolla Kumpulan kampuksen Exactum-rakennuksen kolmannen kerroksen käytävällä, kolmena päivänä kuusi tuntia, ja kahtena kahdeksan tuntia. Kurssilla oli kuusi ohjaajaa. Tietokone- ja kirjallisten tehtävien palautuspäivät olivat viikoittain, kun taas vertaisarvioitavien sovellustehtävien (2 kpl) sekä itsearviointien (3 kpl) palautus erikseen ilmoitettuna päivämäärinä. Kurssilla oli yhteensä kaksitoista tehtäväviikkoa. Kurssitehtävien palautusajat esitellään liitteissä.

Tehtävät tuli palauttaa ajoissa Moodlen palautuskansioihin suuren osallistujamäärän vuoksi. Sairaustapauksissa ohjeena oli olla yhteydessä luennoitsijaan, jonka kanssa oli mahdollista sopia poikkeuspalautuksista. Lisäksi tekemättömiä tehtäviä kannustettiin tekemään myöhemminkin, palautuskansion sulkeuduttua, sillä: ” *Tärkeintä on oppiminen, ei pisteiden kerääminen*”. Tehtävien tekemisen lisäksi kurssin hyväksytty suoritus edellytti kurssikyselyyn vastaamista.

Opiskelijan kurssista saama arvosana määräytyy ansaittujen kurssipisteiden perusteella, joka riippuu tehtyjen tehtävien määrästä ja tehtävätyypistä. Kurssipisteiden maksimi on 100, ja liitteissä esitellään taulukot, jonka mukaan eri tehtävätyypit kerryttävät pisteitä ja määräävät näin opiskelijan kurssiarvosanan.

3.2.4 Tehostetun kisällioppimisen menetelmä

Helsingin yliopiston Johdatus yliopistomatematiikkaan -kursseilla on käytössä *tehostetun kisällioppimisen* menetelmä (Moodle 2019). Rämö, Reinholz, Häsä ja Lahdenperä (2019) kuvailevat menetelmän käyttöön ottamisesta seuranneita muutoksia. He kertovat myös menetelmän taustoista ja käyttöön johtaneista tapahtumista. *Tehostettu* viittaa siihen, että kyseinen menetelmä soveltuu myös laajojen kurssien opetusmenetelmäksi, ja *kisällioppiminen* on valittu sanan *apprenticeship* käännökseksi, sillä suomenkielinen käännös *oppipoika* sisältää sukupuoleen ja ikään liittyviä oletuksia. Tehostetun kisällioppimisen menetelmä on saanut alkunsa Helsingin yliopiston tietojenkäsittelytieteen laitoksella suurten opiskelijamäärien kurssien, kuten ohjelmoinnin alkeiden, opettamisessa kognitiiviseen kisällioppimiseen pohjautuen (Vihavainen, Paksula ja Luukkainen, 2011).

Vihavainen ym. (2011) korostavat harjoitustehtävien olevan menetelmässä tärkeässä roolissa, ja tämän vuoksi niiden määrä on suurempi kuin perinteisessä opetuksessa. Rämö ym. (2019) mukaan menetelmässä keskeistä on se, että opiskelijat oppivat taitoja osallistumalla aitoa ammattimaista tekemistä muistuttaviin aktiviteetteihin. Opetus rakentuu tehtävien tekemisen, kurssitöiden palauttamisen ja käänteisen menetelmän luentojen varaan, jossa uuteen aiheeseen on tutustuttu ennalta tehtävien kautta. Keskeisessä osassa on myös opetustiimi, johon kuuluu vastuuopettajan lisäksi useampia ohjaajia, jotka kiertelevät aktiivisesti auttamassa opiskelijoita Kumpulan kampuksen Matematiikan ja tilastotieteen laitoksen kolmannen kerroksen käytävillä Exactum-rakennuksessa, osoitteessa Pietari Kalmin katu 5. Ohjaajat käyttävät kirkkaanvärisiä liivejä, joista heidät tunnistaa. Vikberg, Oinonen ja Rämö (2015) esittävät menetelmän panostavan *oikea-aikaiseen tukeen* (engl. scaffolding), sillä opetusresurssit ohjataan tehtävien tekovaiheeseen. Näin pyritään hyödyntämään ja laajentamaan opiskelijan *lähikehityksen vyöhykettä*, kunkin yksilön kuvainnollista aluetta, jossa suoriutuminen on kognitiivisesti korkeammalla tasolla yhteistyössä osaavamman henkilön kanssa (Vygotsky, 1978).

Rämön ym. (2019) mukaan näkyvimmit muutokset siirtymisessä tehostetun kisällioppimisen menetelmään ovat olleet rakenteellisia, sillä suljettujen laskuharjoitustilaisuuksien sijaan tehtäviä tehdään yhteistyössä edellä kuvatuilla kolman-

nen kerroksen käytävillä. Tämä rakenteellinen muutos on vaikuttanut positiivisesti koko laitoksen kulttuuriin, sillä oppimisen siirtyessä käytäville opetus on alettu nähdä jaettuna velvollisuutena. Lahdenperä, Postareff ja Rämö (2019) kertovat opiskelijoiden raportoivan positiivisia kokemuksia tehostetun kisällioppimisen menetelmästä. Myös Hautala, Romu, Rämö ja Vikberg (2012) kertovat opiskelijoiden olevan menetelmään tyytyväisiä huolimatta lisääntyneestä työmäärästä.

3.2.5 Kurssin osaamistavoitteet

Kurssin osaamistavoitteet on ilmaistu matriisissa, jossa kuvaillaan kunkin kurssin aihealueen kohdalla kriteereitä ja väittämiä arvosanoja 1-2, 3-4 ja 5 vastaavaan taitotasoon. Kurssin osaamistavoitteet jaotellaan kymmeneen eri osa-alueeseen, jotka ovat joukko-oppi, symbolinen logiikka, todistustekniikat, kuvaukset, kompleksiluvut, tietojenkäsittelytieteen matematiikka, matematiikan lukeminen ja kirjoittaminen, matemaattinen keskustelu, palautteen antaminen ja vastaanottaminen sekä matemaattikkoidentiteetin rakentuminen. Nämä osaamistavoitteiden osa-alueet on listattu taulukkoon 5. Häsä (matematiikan opetuksen seminaari, 3.4.2020) kertoi Johdatus yliopistomatematiikkaan -kurssin keskeisten asioiden olevan joukko-oppi, symbolinen logiikka sekä matemaattinen ajattelu ja kommunikaatio.

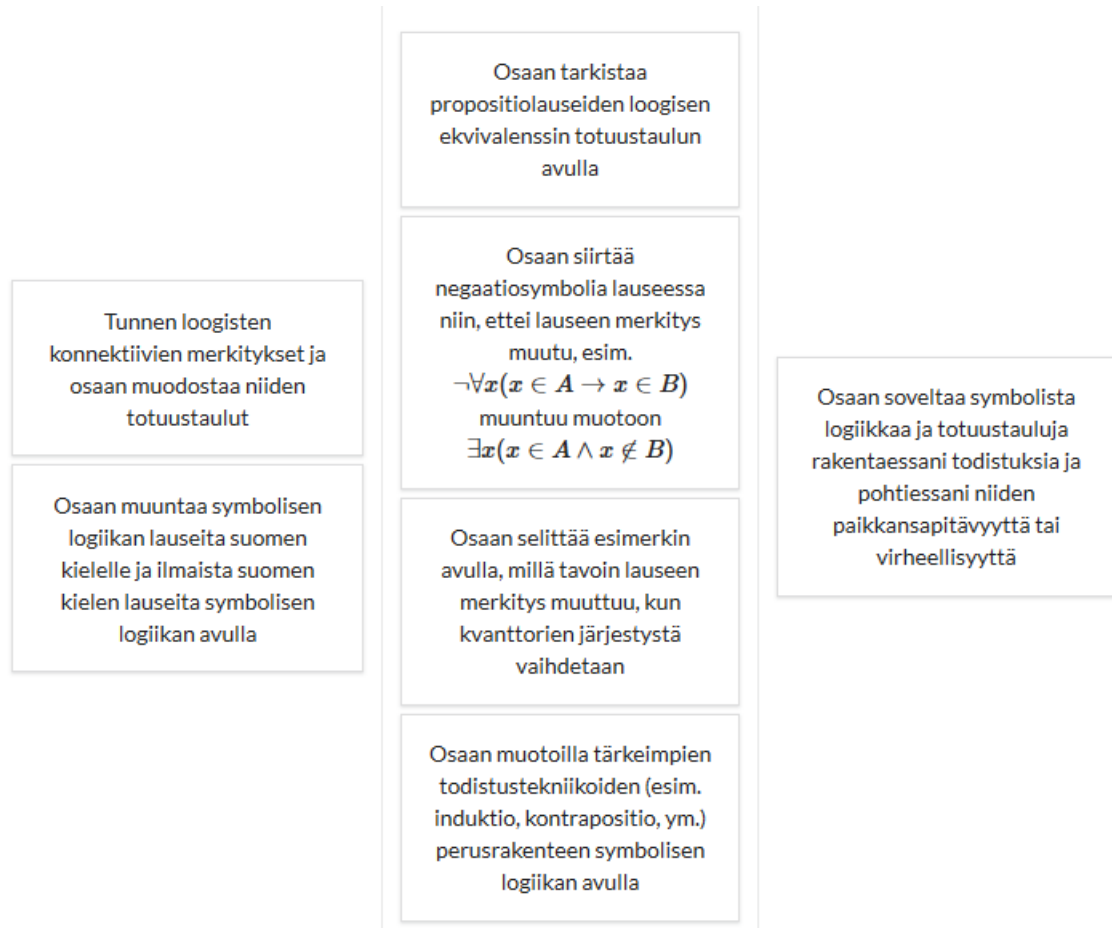
Taulukko 5. Johdatus yliopistomatematiikkaan -kurssin osaamistavoitteiden osa-alueet. Lähde: Moodle 2019.

Osa-alueet
joukko-oppi
symbolinen logiikka
todistustekniikat
kuvaukset
kompleksiluvut
tietojenkäsittelytieteen matematiikka
matematiikan lukeminen ja kirjoittaminen
matemaattinen keskustelu
palautteen antaminen ja vastaanottaminen
matemaattikkoidentiteetin rakentuminen

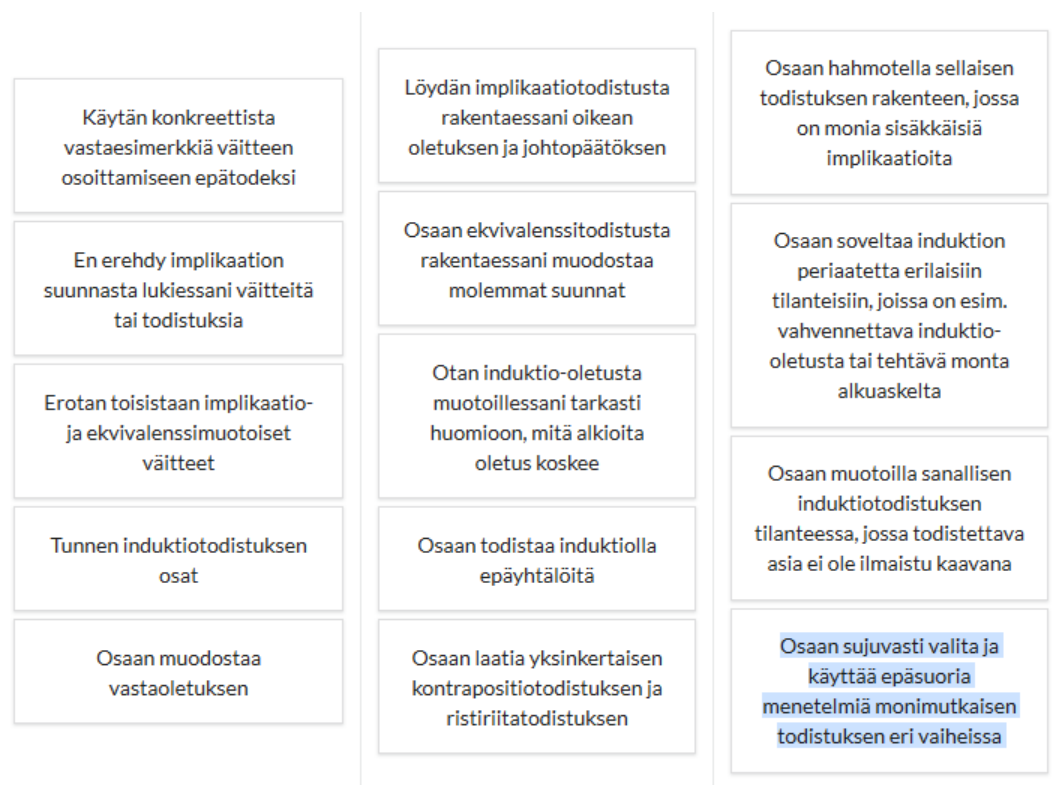
Seuraavaksi esitellään joitakin, erityisesti tähän tutkimuksen teemoihin sopivia, todistamiseen liittyviä, mainintoja osaamistavoitematriisista. Joukko-oppiin liittyvät osaamistavoitteet näkyvät kuvassa 4, ja kuvassa 5 käsitellään symbolisesta logiikasta opittavia taitoja. Kuvassa 6 esitellään eri arvosanoja vastaavia väittämiä todistustekniikoiden osaamisesta, ja kuvassa 7 perehdytään matematiikan lukemisesta ja kirjoittamisesta asetettuihin tavoitteisiin. Kuvassa 8 puhutaan matemaattisesta keskustelusta, joka tässä tutkimuksessa nähdään todistamisen epäformaalina muotona, ja kuvassa 9 kuvaillaan matemaattikkoidentiteetin rakentumisen eri tasoja. Kuvissa on korostettuna väitteet, jotka kiinnittivät tutkijan huomion ja sopivat tämän tutkimuksen teemoihin todistustekniikoista, tunteista ja negatiivisten tunteiden säätelystä. Halutessaan näihin osaamistavoitteisiin voi perehtyä yksityiskohtaisemmin myös kurssin muiden aihealueiden osalta (Helsingin yliopiston DISA-työkalu, 2020).

Osio	Taitotasot			
	Esitiedot	Arvosanaan 1-2 riittävät taidot	Arvosanaan 3-4 riittävät taidot	Arvosanaan 5 riittävät taidot
Joukko-oppi			Osaan kuvailla eron alkion ja osajoukon välillä	
		Osaan lukea ja käyttää itse joukkomerkintää, jossa joukon alkiot on ilmaistu ehdon avulla	Osaan muodostaa annetun pienen joukon kaikki osajoukot	Osaan perustella, miksi tyhjä joukko on jokaisen joukon osajoukko
		Osaan muodostaa annettujen joukkojen yhdisteen, leikkauksen ja erotuksen sekä joukon komplementin	Tiedän, mitä tarkoittaa, että tyhjä joukko on jokaisen joukon osajoukko	Ymmärrän sisältyvyyssuhteen alkuoletuksen merkityksen ja osaan hahmotella sisältyvyyssuhteen rakenteen monimutkaisissakin tilanteissa, jotka sisältävät karteesisia tuloja tai kuvausten kuvia ja alkukuvia
		Osaan muodostaa kahden joukon karteesisen tulon	Osaan rakentaa sisältyvyyssuhteen eli osajoukkotodistuksen	
		Osaan tarkistaa, onko joukko toisen joukon osajoukko, kun joukkojen alkiot on lueteltu	Osaan rakentaa todistuksen, jossa kaksi joukkoa osoitetaan samaksi	Tunnen osituksen käsitteen ja osaan tarkistaa, muodostavatko annetut joukot osituksen
			Osaan havainnollistaa joukkojen välisiä suhteita Vennin kaavioiden ja karteesisen koordinaatiston avulla	

Kuva 4. Johdatus yliopistomatematiikkaan -kurssin osaamistavoitteet joukko-opissa. Lähde: Kurssin osaamistavoitteet, Moodle 2019.



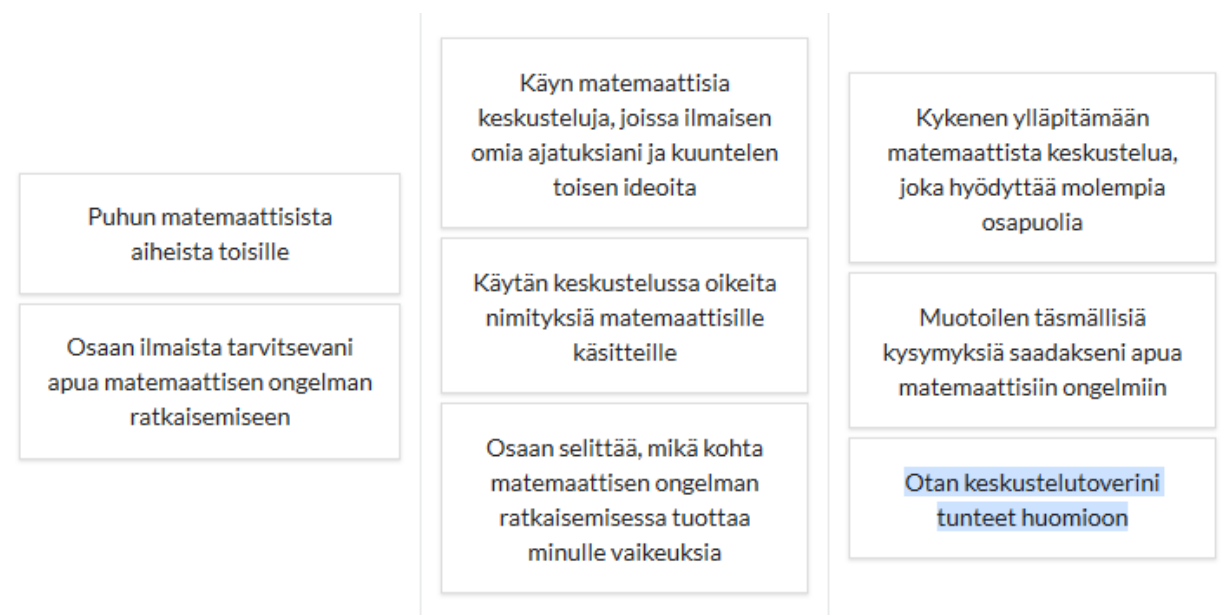
Kuva 5. Symbolinen logiikka. Lähde: Kurssin osaamistavoitteet, Moodle 2019.



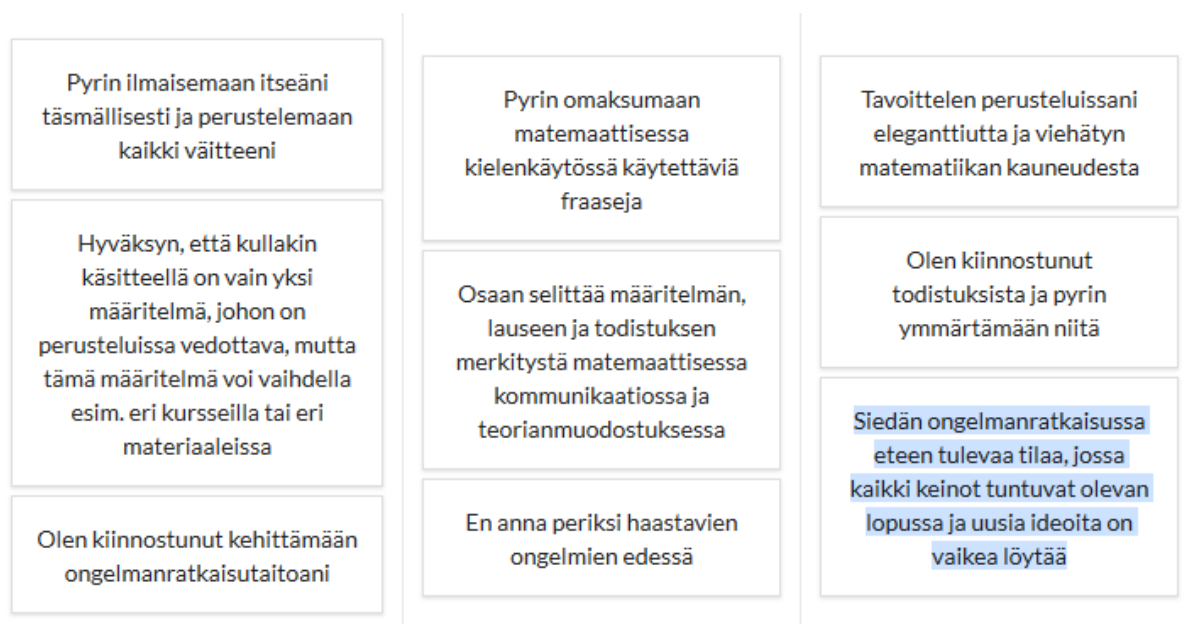
Kuva 6. Todistustekniikat ja arvosanaan 1-2, 3-4 ja 5 vaadittavat taidot. Lähde: Kurssin osaamistavoitteet, Moodle 2019.



Kuva 7. Matematiikan lukeminen ja kirjoittaminen. Lähde: Kurssin osaamistavoitteet, Moodle 2019



Kuva 8. Matemaattinen keskustelu. Lähde: Kurssin osaamistavoitteet, Moodle 2019.



Kuva 9. Matemaatikkoidentiteetin rakentuminen. Lähde: Kurssin osaamistavoitteet, Moodle 2019.

3.2.6 Tehtäväviikkojen aiheet

Kurssilla on myös alustava suunnitelma aiheiden aikataululle, jotka esitellään kuvissa 9 ja 10. Kisällioppimisen menetelmässä aiheisiin tutustutaan ensin tehtävien kautta, joten viikko, jona tietty aihe esiintyy ensimmäistä kertaa, on merkitty aiheen yhteyteen.

Ensimmäinen periodi

Tehtäväviikko	Joukko-oppi	Todistaminen	Logiikka
1	joukkojen merkintöjä, yhdiste, leikkaus ja erotus		loogiset konnektiivit
2	tyhjä joukko, osajoukko	väitteen todistaminen vääräksi vastaesimerkillä	looginen ekvivalenssi
3	osajoukoksi osoittaminen	"jos...niin..."-tyyppisen väitteen todistaminen	kvanttorit
4	samaksi joukoksi osoittaminen, perusjoukko ja komplementti	"jos ja vain jos"-tyyppisen väitteen todistaminen	kvanttorit ja negaatio
5	potenssijoukko	induktio todistus	kvanttorien järjestys
6	ositus, karteeminen tulo		
(ei uusia tehtäviä)	<i>kertausta ja seuraavan periodin aiheita</i>		
<i>lukuviikko</i>			

Kuva 10. Tehtäväviikkojen uusien aiheiden aikataulu ensimmäisessä periodissa. Lähde: Moodle 2019.

Jälkimmäinen periodi

Tehtäväviikko	Joukko-oppi	Todistaminen	Kompleksiluvut	Tietojenkäsittelytieteen aiheet
7	kuvauksen määritelmä	kontrapositiotodistus	kompleksiluvun määritelmä, kompleksiluvuilla laskeminen	geometrisen lukujono ja geometrisen sarja
8	osajoukon kuva kuvauksessa	ristiriitatodistus	liittoluku ja itseisarvo	
9	osajoukon alkukuva		käänteisluku ja osamäärä	eksponenttifunktio ja logaritmi
10	injektio ja surjektio		napaesitys	
11	yhdistetty kuvaus		eksponenttitesitys	binomikertoimet ja kertoma
12	käänteiskuvaus ja bijektio		kompleksilukuyhtälöt	
(ei uusia tehtäviä)	<i>kertausta</i>			
<i>lukuviikko</i>				

Kuva 11. Tehtäväviikkojen uusien aiheiden aikataulu toisessa periodissa. Lähde: Moodle 2019.

Kuten kuvista 10 ja 11 näkyy, kurssin viikoilla 2-8 esitellään todistamisesta joka viikko uusia asioita. Tehtävissä kertaautuu myös edellisten viikkojen aiheet. Kursilla käydään läpi erilaisista todistusmenetelmistä vastaesimerkin käyttö, suoran todistuksen menetelmä, induktiotodistus, sekä käänteisen todistuksen menetelmät kontrapositiotodistus ja ristiriitatodistus. Näitä todistustekniikoita esiteltiin tarkemmin tutkielman alussa alaluvussa 2.1.1.

4 Affekteista, tunteista ja matematiikasta

Tässä luvussa esitellään matematiikanopetukseen ja affekteihin liittyvää teoriaa. Ensin pohditaan käsitteiden affekti ja tunne määritelmiä ja suhdetta. Affektien merkitystä matematiikan opetuksen kannalta käydään läpi esimerkkien kautta. Luvussa tutustutaan myös tunteiden ja affektien jäsentämiseen liittyvään teoriaan; tämän tutkimuksen kannalta keskeinen Feldman Barrettin ja Russellin malli (1998) jäsentää affekteja valenssin ja aktivaation jatkumoiden perusteella. Tunteiden ja tavoiteorientaatioiden yhteyksiin luodaan myös näkemystä. Lopuksi käsitellään erilaisten tunteiden yhteyttä oppimisstrategioihin.

4.1 Affekteista

Affekteilla tarkoitetaan useimmiten ihmisen tietoisien tiedonkäsittelyn osittain ulottumattomissa olevia mielialoja, tunnetekijöitä ja asenteita. Eri viitekehyksissä käsitettä tulkitaan kuitenkin hieman eri tavoin. Kasvatustieteen kontekstissa *affektit* määritellään yleisesti asenteiksi, emootioiksi ja arvoiksi, ja niillä voi olla tärkeä merkitys oppilaan koulunjälkeisessä elämässä (Popham, 2009). Nämä arvot, asenteet ja emootiot ilmenevät ympäristössä, jossa kasvatusta ja koulutusta tapahtuvat, selvimmin kasvattajien ja kouluttajien ominaisuuksina jokaisen henkilökoh- taisessa persoonallisuudessa, mutta myös järjestelmän tasolla. Merkityksellisenä voidaan nähdä erityisesti se, mitkä näistä affekteista siirtyvät oppijalle koulutuk- sen myötä. (Haydon, 2007.)

Psykologiassa affektilla puolestaan tarkoitetaan aistimuksia, emootioita tai mie- lialoja, jotka synnyttävät affektiivisen kokemuksen eli psyko-fysiologisen tilan. Nämä affektiiviset kokemukset ja tilat yhdistävät mielensisäisiä ja fyysisiä proses- seja. Nykynäkömyksen mukaan affektien kolme eri ulottuvuutta ovat valenssi, ak- tivaatio sekä motivationaalinen intensiteetti. (Harmon-Jones, Gable & Price, 2013.)

4.1.1 Tunteista

Tässä tutkimuksessa keskitytään affekteista erityisesti *emootioihin* eli *tunteisiin*. Bowerin (1992) mukaan tunteet ovat kehittyneet antamaan elämäämme merkitystä. Cabanac (2002) määrittelee tunteet seuraavalla tavalla: ”*mitä tahansa korkean intensiteetin ja korkean hedonisen sisällön (mielihyvä/mielipaha) mentaalista kokemusta*”. Emootioiden määritelmästä ei kuitenkaan ole tieteellistä konsensusta, ja myös matematiikanopetuksen yhteydessä tunteita on lähestytty monelta eri kannalta (Zan, Brown, Evans & Hannula, 2006). Zan ym. (2006) mukaan yhtä mieltä ollaan kuitenkin siitä, että emootiot sisältävät fysiologisia reaktioita, ja vaikuttavat tiedonkäsittelyyn muun muassa suuntaamalla muistia ja tarkkaavaisuutta sekä aktivoimalla käyttäytymismalleja. Martinez-Sierra ja del Socorro Garcia-Conzalez (2016) esittävät, että tutkimalla emotionaalisia kokemuksia on lisäksi mahdollista lähestyä muita affektiivisiä tekijöitä, kuten motivaatiota ja identiteettiä. Emootioiden ajatellaan myös olevan keskeisessä osassa ihmislajin selviytymisen ja sopeutumisen näkökulmasta (Hannula, 2002; Lazarus, 1991; Mandler, 1989). Tunteet ovat täten tärkeitä ja merkityksellisiä kokijalleen, eikä niiden hyödyllisyyttä voida kiistää. Tässä tutkimuksessa puhutaan *todistamisen oppimisen* kannalta hyödyllisistä ja haitallisista tunteista. Tällöin viitataan siihen, millainen vaikutus kullakin tunteella voidaan nähdä olevan todistamisen oppimisen kannalta. Tämä ei siis poissulje sitä, etteikö todistamisen oppimisen kannalta haitallinenkin tunne voisi olla kokijalleen hyödyllinen. Tutkimus ei ota kantaa näihin tunteiden yksilöllisiin merkityksiin.

Myös *asenteita* tullaan sivuamaan, ja tässä tutkimuksessa ne nähdään arvojen ja tunteiden yhteenkietoutumana. Tutkittaessa asenteiden muutosta todistamiseen liittyen ajatellaan pohjalla olevan sekä oppijan tunnekokemukset, että koulutuksen välittämät arvot. Myös arvot nousivat esille tässä tutkimuksessa tutkittaessa tarkemmin kurssilaisten kokemia tunteita. Tämä antaa viitteitä siitä, että yksilön arvot ovat koettujen tunteiden taustalla, ja kuvaa affektiivisen kentän monimutkaisuutta.

4.1.2 Affektit matematiikanopetuksen tutkimuksessa – lyhyt katsaus historiaan

Kuten edellä kerrottiin, affekteja on tulkittu eri tavoin eri viitekehyksissä. Tämän lisäksi myös saman alan eri tutkijoiden näkemykset keskenään vaihtelevat. Zan, Brown, Evans ja Hannula (2006) koettavatkin rakentaa yleiskuvaa tutkimuksesta kommunikoinnin helpottamiseksi. Matematiikkaa ja affekteja yhdistävä tutkimus keskittyi 1960- ja 1970-luvuilla matematiikka-ahdistukseen ja matematiikka-asenteisiin. Matematiikka-ahdistuksen tutkimukseen liittyvät menetelmät ja teoriat sovelsivat psykologiasta tunnettua koeahdistusta matematiikan kontekstiin. Ahdistuksen ja suorituksen välillä ajateltiin olevan negatiivinen yhteys ahdistuksen haitatessa kognitiivista prosessointia. Ahdistusta mitattiin Richardsonin ja Suinnin (1972) kehittämällä MARS-mittarilla (*Mathematics Anxiety Rating Scale*). Matematiikkaan liittyviä asenteita selvittävät tutkimukset lainasivat niin ikään sosiaalipsykologialta; mittarina toimivat Likert-asteikolliset kyselyt. Taustalla asenteita kartoittavassa tutkimuksessa oli ajatus siitä, että asenne matematiikkaa kohtaan on yhteydessä matematiikan oppimistuloksiin. Asenteesta seuraavien vaikutusten – kuten matematiikasta pitämisen – ajateltiin myös olevan merkityksellisiä itsessään. Laajimmin käytetty asennemittari on ollut Fenneman ja Shermanin (1976) laatima *Mathematics Attitude Scales*. Matematiikanopetuksessa vallalla ollut ongelmanratkaisun aikakausi 1980-luvulla ja siihen liittyvä tutkimus kiinnittivät huomion affektien ja ongelmanratkaisun vaatiman kognition yhteyteen. Esimerkiksi Schoenfeld (2014) ajattelee metakognitiivisten taitojen olevan keskeisiä ongelmanratkaisussa, sillä pelkkä ongelmanratkaisuun vaadittavien kognitiivisten kykyjen omaaminen ei näytä takaavan ongelmanratkaisussa onnistumista. Käännekohtana affektien tutkimuksen kannalta matematiikanopetuksen tutkimuksessa voidaan pitää Adamsin ja McLeodin kirjan *Affect and mathematical problem solving* ilmestymistä 1989 (Zan ym. 2006). Tämän ansiosta affekteihin on alettu kiinnittää huomiota matematiikan opetuksen tutkimuksessa sekä yleisesti että ongelmanratkaisuun liittyen.

Todistaminen voidaan nähdä osana ongelmanratkaisua, sen varmistuksena ja huipentumana (Malinen, 1998). Tämä ajatus on peräisin jo Eukleideelta, jonka mukaan ongelmanratkaisuprosessin osat ovat julkituominen, asetelma, määrittely tai täsmennys, konstruointi, todistaminen ja johtopäätös. Malisen (1998) mukaan nämä vaiheet saavat myöhemmissä oppikirjoissa muodon oletus, väitös,

todistus. Vaikka siis ongelmanratkaisuun liittyvät huomiot johtivat matematiikan-opetuksen tutkijat affektien pariin, ja todistaminen voidaan nähdä osana ongelmanratkaisua, ei yliopistotasaisen todistamisen ja affektien suhteesta tunnu löytyvän paljoakaan kirjallisuutta. Satyam (2018) esittääkin, että matemaattisen todistamisen affektiivisesta puolesta, eli asenteista, uskomuksista ja tunteista, tiedetään vasta varsin vähän. Affektit kuitenkin ovat keskeisessä osassa matematiikan oppimisessa, ja vaikuttavat ongelmanratkaisuprosessin aikaiseen tiedonkäsittelyyn sekä yksilön motivaatioon arvostaa ja haluun tehdä matematiikkaa. Hänen mukaansa positiiviset kokemukset transitiovaiheissa, kuten todistamaan oppimisessa, ovat tärkeitä sen kannalta, että opiskelijat saadaan pidettyä STEM-aloilla. STEM-aloilla tarkoitetaan matemaattis-luonnontieteellisiä sekä insinöörityön aloja (engl. *Science, Technology, Engineering, Mathematics*). Nämä teknistieteelliset alat ovat tunnetusti miesvaltaisia, ja kärsivät kehittyneissä maissa opiskelijapulasta; opiskelu- ja työpaikkoja olisi tarjolla enemmän kuin kiinnostuneita riittää. Suomessa LUMA-keskus Suomi tekee arvokasta työtä muun muassa lasten ja nuorten parissa innostaakseen tulevaisuuden työntekijöitä STEM-aloille.

4.2 Matematiikka ja affektit McLeodin mukaan

McLeod (1992) määrittelee useita erilaisia affektiiviseen kenttään kuuluvia käsitteitä, joista tärkeimpinä pitää emootioita eli tunteita, asenteita ja uskomuksia. McLeodin työ voidaan nähdä tärkeänä juuri matematiikkaan ja affekteihin liittyvän tutkimuskentän käsitteellistämisen kautta (Zan, Brown, Evans & Hannula, 2006). Seuraavaksi tutustutaan tarkemmin McLeodin (1992) käsitteellistämiin affekteihin matematiikanopetukseen liittyvien esimerkkien avulla.

Tunteet vaihtelevat nopeammin, ovat vähemmän kognitiivisia ja laadultaan intensiivisempiä kuin asenteet ja uskomukset. Esimerkkinä negatiivisesta tunteesta matematiikkaa kohtaan annetaan joillekin oppilaille ominainen tapa reagoida matematiikan tekemiseen, tai jopa sen tekemisen ajattelemiseen, paniikilla. Positiivinen tunne taas voi olla tyydyttävä ahaa-elämys liittyen esimerkiksi oivallukseen ongelmanratkaisussa. McLeod huomauttaa, että tunnereaktioiden tutkiminen ei

ole ollut merkittävässä roolissa matematiikan opetukseen liittyen, sillä nopeasti vaihtuvina luotettavan tiedon kerääminen kyselyillä on tutkijoiden mielestä ymmärrettävästi haastavaa.

Asenteet McLeod määrittelee kohtalaisen intensiteetin positiivisia ja negatiivisia tuntemuksia sisältäviksi affekteiksi. Tunteisiin verrattuna ne ovat luonteeltaan vakaampia ja kognitiivisempia. Eräs tunteita ja asenteita yhdistävä seikka on se, että toistuvat tunnereaktiot matematiikkaan liittyvään kokemukseen voivat automatisoitua asenteeksi. McLeod antaa esimerkkinä tästä opiskelijan, jolla on toistuvia negatiivisia kokemuksia geometrian todistuksiin liittyen. Nämä negatiiviset tunnereaktiot muuttuvat ajan kuluessa vakaammaksi, vähemmän fysiologisesti stimuloivaksi, asenteeksi, jota on mahdollista selvittää kyselyillä. On myös mahdollista, että nämä negatiiviset tunteet geometrian todistuksia kohtaan yleistyvät, paitsi negatiivisiksi asenteiksi geometriaa kohtaan, myös koko matematiikkaa koskevaksi.

Uskomukset ovat vakaita, kognitiivisempia ja vähemmän intensiivisiä kuin asenteet. McLeodin mukaan uskomukset kehittyvät vähitellen, ja kulttuuriset tekijät ovat tässä olennaisessa osassa. Uskomuksista McLeod mainitsee erityisiksi neljä eri osa-aluetta: uskomukset matematiikasta, itsestä, matematiikan opettamisesta ja sosiaalisesta kontekstista.

McLeodin (1992) mukaan affektiivisten tekijöiden huomioiminen tutkimuksissa, jotka liittyvät kognitioon ja ohjaamiseen, vahvistaisi matematiikan opetukseen liittyvää tutkimusta. McLeodilla (1989) ja Mandlerilla (1989) on molemmilla kognitiivis-konstruktivistisen mallin mukainen näkemys, joka käsitteellistää emotionaalisen kokemuksen muodostumisen seuraavalla tavalla:

1. Yksilön odotusten ja meneillään olevan aktiviteetin vaatimusten epäsuhta johtaa sisäiseen kiihtymystilaan.
2. Fysiologinen kiihtymystila ja yksilön arviointi tilanteesta johtavat tunteen "rakentumiseen".
3. Tunnekokemus voi johtaa yksilön tietoisien tiedonkäsittelyn kapasiteetin vähenemiseen, sillä emotionaalisen rakentumisen prosessin nähdään vaativan tietoista tiedonkäsittelyä. Tämän vuoksi esimerkiksi ongelmanratkaisu voi vaikeutua.

Mandlerin teorian mukaan siis affektiiviset tekijät nousevat ”keskeytyneiden suunnitelmien” emotionaalisista seurauksista. Mandlerin mukaan affektiiviset tekijät ovat yhteydessä yksilön tietoon ja uskomuksiin, sillä tulkinnat ”keskeytyneistä suunnitelmista” vaihtelevat eri ihmisten välillä. McLeod (1992) antaa esimerkin kuudesluokkalaisesta oppilaasta ratkomassa sanallista ongelmatehtävää. Jos oppilaalla on uskomus, että kaikki matemaattiset ongelmatehtävät pitäisi pystyä ratkaisemaan melko nopeasti, mutta ei kykene tähän, oppilas saattaa kokea negatiiviseksi tulkittavissa olevan kiihtymystilan. Jos nämä tilanteet toistuvat usein, oppilaalle saattaa kehittyä negatiivinen asenne sanallisia ongelmatehtäviä kohtaan. Monesti tällaiset negatiiviset asenteet yhtä matematiikan osa-aluetta kohtaan saattavat yleistyä koskemaan matematiikkaa kokonaisuudessaan tai oppilasta itseään matematiikan oppijana. Jos puolestaan oppilaalla on uskomus, jonka mukaan sanalliset ongelmatehtävät saattavat olla haastavia lahjakkaillekin ongelmanratkojille ja vaativat pidemmän aikaa yritystä ratketakseen, ei oppilas tulkitse kiihtymystilaansa välttämättä negatiiviseksi. Siis kokemuksen tulkinta määrää lopputuloksen, ei pelkkä kokemus itsessään.

4.3 Valenssi ja aktivaatio – Feldman Barrett ja Russell

Tässä alaluvussa esitellään tämän tutkimuksen kannalta oleellista tunteiden ja affektien jaottelua valenssin ja aktivaation avulla. Näiden dimensioiden mukaista luokittelua ovat hyödyntäneet Feldman Barrettin ja Russellin (1998) lisäksi myös Thayer (1986) ja Tellegen, Watson ja Clark (1999). Tämän tutkimuksen tarkoituksiin sopi parhaiten Feldman Barrettin ja Russellin malli, sillä heidän mukaansa jaottelun avulla on mahdollista kuvailla keskeiset affektit.

Felman Barrett ja Russel (1998) yrittävät ratkaista pitkään jatkunutta, positiivisia ja negatiivisia affekteja koskevaa, kiistaa käsitteellisin ja empiirisin menetelmin. Heidän mukaansa tutkijoita on pitkään kiinnostanut se, ovatko positiiviset ja negatiiviset affektit erillisiä kokonaisuuksia, vai saman ulottuvuuden eri ääripäät. He kertovat affektien vastakohtaisuuden ilmenevän semanttisesti monissa eri kielissä, ja usein tämä kaksisuuntaisuus on oletuksena affekteihin liittyvässä tutki-

muksessa. Itseraportoitujen affektien tutkimusperinteen voidaan katsoa alkaneen, kun kokeellisen psykologian isä, Wilhelm Wundt, jäsensi affektiivisia tunteuksiaan kaksisuuntaisesti itsetarkkailun keinoin. Feldman Barrett ja Russell kertovat objektiivisten tekniikoiden kehittymisen tuoneen mukanaan ajatuksen positiivisten ja negatiivisten tunteiden riippumattomuudesta, ja näistä ovat aluksi puhuneet Nowlis ja Bradburn 1960-luvulla, jotka havaitsivat, että onnellisuuden aste ei ennustanut surullisuuden astetta edes samalla ajanhetkellä. Feldman Barrett ja Russell kertovat monien tutkijoiden päätyneen myöhemmin siihen, että affektit olisivat moniulotteisia kokonaisuuksia, vaikkakaan ajatus positiivisten ja negatiivisten affektien vastakohtaisuudesta ei ole täysin kadonnut. He esittelevätkin pelkistetyn mallin, joka yhdistää ajatuksia affektien kaksisuuntaisuudesta ja erillisyydestä. Mallin kaksi ulottuvuutta ovat miellyttävyys ja aktivaatio. Malli kuvataan tasona, jossa 180 astetta toisiinsa suhteessa olevat, eri affekteja kuvaavat termit, ovat toistensa vastakohtia sekä aktivaation että miellyttävyyden suhteen. Malli esitetään kuvassa 12. Lisäksi malli olettaa jokaisen neljänneksen olevan oma itsenäinen kokonaisuutensa. Tämä Feldman Barrettin ja Russellin (1998) malli kuvaa affektiivista kenttää, mutta ei kuitenkaan ole malli itse affekteista, toisin kuin esimerkiksi edellä esitelty McLeodin jäsenitys. Testatessaan malliaan Feldman Barrett ja Russell (1998) päätyivät siihen, että kaksi pääulottuvuutta ovat kaksisuuntaisia, ja lähes toisistaan riippumattomia.

Tämä Feldman Barrettin ja Russellin affektiivista kenttää kuvaava malli on tässä tutkimuksessa merkittävässä osassa, sillä tämä malli otettiin keskeiseksi analyysia ohjaavaksi malliksi jäsenenneltäessä Johdatus yliopistomatematiikkaan -kurssilaisten kokemia tunteita. Esimerkiksi Linnenbrink (2007) toteaa, että jaottelu aktivaatioon ja valenssiin voi olla erityisen olennainen juuri koulutuksen ja kasvatuksen yhteydessä. Hänen mukaansa aktivoiva epämiellyttävä affekti voi johtaa huomattavasti korkeampaan oppimistehtävään sitoutumiseen kuin ei-aktivoiva epämiellyttävä affekti. Samoin eri aktivaatioasteen positiiviset tunteet voivat vaikuttaa merkittävästi oppimisen ja sitoutumisen laatuun.

Mallin kuvaama tunteiden jäsentely valenssin ja aktivaation suhteen on saanut tukea myös myöhemmissä tutkimuksissa (esim. Keine, Goetz, Pekrun & Hall, 2005). Siihen pohjautuen on myös kehitetty uusia oppimista ja tunteita käsitteleviä malleja, kuten Pekrunin (2006) saavutustunteiden kontrolliarvoteoria. Saavutustunteiden kontrolliarvoteorian mukaan oppilaiden ja opiskelijoiden arvon ja

kontrollin havainnot ennakoivat heidän saavutustilanteissa kokemiaan tunteita. Arvoon liittyvillä havainnoilla tarkoitetaan sitä, kuinka tärkeänä oppilas pitää tehtävässä menestymistä, ja kontrolli viittaa oppijan havaintoihin kontrollista kulloiseenkin saavutustehtävään ja lopputulokseen liittyen. Nämä kontrollin ja arvon arviot yhdessä ennustavat, millaisia saavutustunteita oppiessa koetaan. Kontrolliarvoteoria siis käsittelee eri tunteiden syntymiseen liittyviä prosesseja, tunteiden valenssia, sekä sitä, milloin tunteet ilmenevät.

Affekteihin on kuitenkin myös muita näkemyksiä ja tulkintoja, vaikka valenssiaktivaatio-jäsennys osoittautuikin tämän tutkimuksen kannalta hedelmälliseksi jäsenntäessä opiskelijoiden kokemia tunteita. Esimerkiksi Rosenberg (1998) jaottelee affektit *tilanomaisiin* (engl. state-like) ja *piirteenomaisiin* (trait-like). Affektin piirteenomaisuus käy ilmi yksilön tavanomaisessa tyyliässä reagoida maailmaan, ja tämä tyyli voidaan nähdä persoonallisuuden tapaan suhteellisen pysyvänä ja yksilöllisenä. Tilanomaisuus affekteissa ilmenee yksilön toimiessa muuttuvassa ympäristössä, jossa erot reagointitavoissa voi ymmärtää tilanteesta johtuviksi. Nämä affektiiviset tilat koostuvat Rosenbergin mukaan mielialoista ja emootioista, joita erottavat kesto ja intensiteetti.

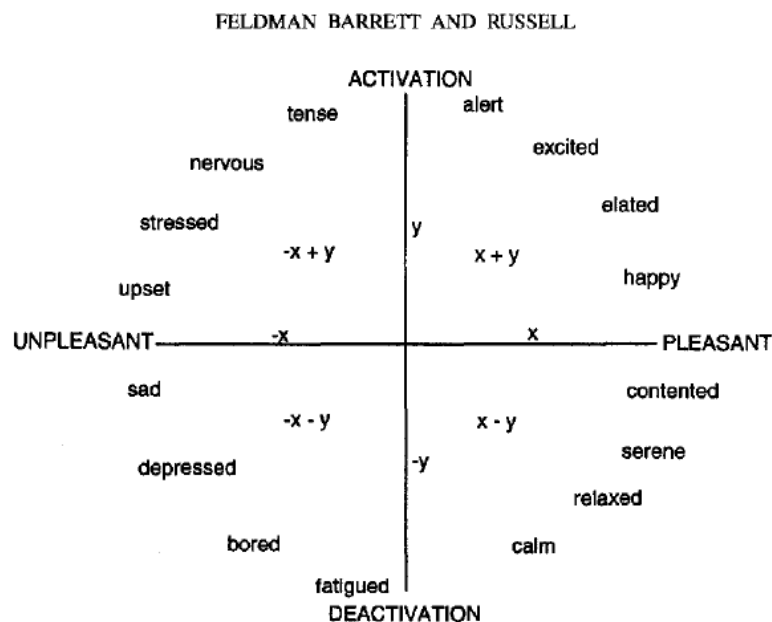


Figure 1. A semantic structure of affect. The letters x and y represent semantic components: x = pleasantness; y = activation.

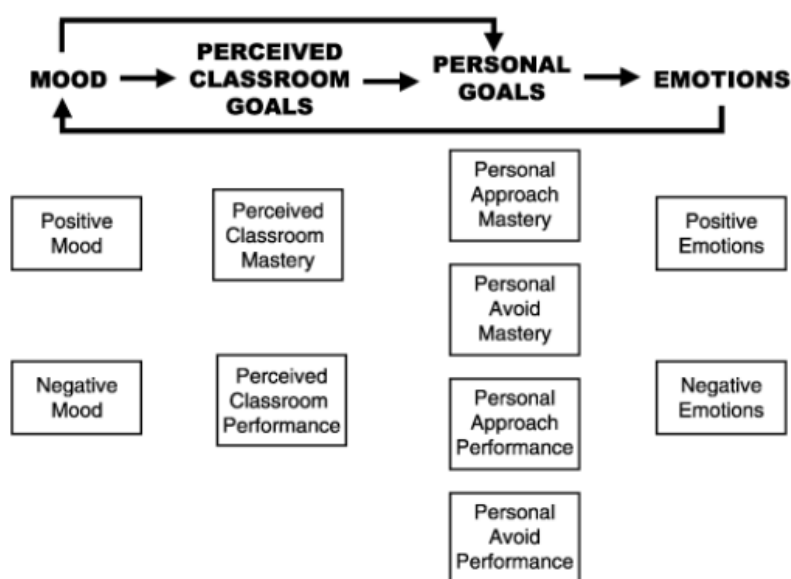
Kuva 12. Feldman Barrettin ja Russellin malli affektiivisestä kentästä. Lähde: Feldman Barrett ja Russell 1998.

4.4 Tunteet ja tavoiteorientaatiot

Tässä luvussa pohditaan tunteiden ja tavoiteorientaatioiden yhteyttä sekä sitä, miten edellä kuvatun valenssin, eli miellyttävyyden tai epämiellyttävyyden, voi nähdä liittyvän oppijan erilaisiin tavoiteorientaatioihin. Tavoiteorientaatiolla viitataan siihen, mihin oppija oppimistilanteessa pyrkii ja millaisia tavoitteita hän suosii. Oppimis- ja suoritustilanteissa oppija pyrkii samanaikaisesti sekä ylläpitämään oppimista ja suoriutumista että omaa hyvinvointiaan. Oppijan tavoiteorientaatioprofiili on eräs oppimis- ja suoritustilanteissa vaikuttava yksilöllinen tekijä, jonka voi nähdä olevan yhteydessä oppimistilanteessa koettuihin affekteihin. (Tuominen, Pulkka, Tapola & Niemivirta, 2017.)

4.4.1 Oppijan erilaiset tavoiteorientaatiot

Affektit ovat merkityksellisiä oppimisessa, sillä olemme taipuvaisia toistamaan sellaista käytöstä, josta seuraa meille jotain hyvää. Linnenbrink ja Pintrich (2002) ovat kehittäneet mallin opiskelijan erilaisista tavoiteorientaatioista ja affekteista (kuva 13). Mallin mukaan affektien ja tavoiteorientaatioiden välillä on vastavuoroinen, joskin hieman epäsymmetrinen relaatio. Seuraavaksi esitellään tarkemmin tavoiteorientaatioita, sekä erilaisten tavoiteorientaatioiden vaikutusta koettuihin affekteihin.



Kuva 13. Linnenbrinkin ja Pintrichin käsitteellinen malli affektien ja tavoitteiden yhteydestä. Lähde: Linnenbrink & Pintrich, 2002.

Pohjalla Linnenbrinkin ja Pintrichin mallissa tavoiteorientaatioiden vaikutuksesta affekteihin on Carverin ja Scheierin (1990) itsesäätelyn kontrolliprosessimalli, sekä tutkimusta tavoiteorientaatioista. Carverin ja Scheierin kontrolliprosessimallin mukaan affektit voivat vaihdella tietyn tavoitteen välttelyn tai lähestymisen, sekä oman tavoitteessa edistymisen mukaan. Lähestymistavoitteet yhdistetään yleisesti riemuun tai suruun, riippuen siitä, miten tavoitteessa on onnistuttu. Vastaavasti eri tavoiteorientaatioiden ajatellaan herättävän samanlaisia tunteita, kun tavoitetta lähestytään tai siitä ajaudutaan kauemmaksi.

Pintrich (2000) esittelee erilaisia tavoiteorientaatioita kattavasti. Saavutusmotivaation tutkijat ovat kehittäneet monia malleja tavoiteorientaatioihin liittyen. Vaikka mallit eroavat muun muassa tavoiteorientaation määritelmiltään, konstruktien nimeämiseltä ja orientaatioiden lukumäärältä, suurin osa malleista ehdottaa kahta yleistä tavoiteorientaatiota. Nämä kaksi eri orientaatiota koskevat tehtävää lähestyvän ja tehtävään sitoutuvan yksilön syitä ja tarkoituksia. Esimerkiksi Dweck ja Legget (1988) nimeävät nämä orientaatiot *oppimis-* ja *saavutustavoitteiksi*, kun taas Ames (1992) puhuu *hallinta-* ja *suoritustavoitteista*. Amesin mallin hallintatavoitteet orientoivat oppijan kehittämään uusia taitoja, ymmärtämään työtään, parantamaan osaamistasoaan tai saavuttamaan tunteen mestaruudesta ja asian hallitsemisesta sekä osaamisesta. Suoritustavoitteet sitä vastoin orientoivat oppijan keskittymään omiin kykyihin ja omaan arvoon. Huomion kohteena on oma osaaminen suhteessa muihin, ja tavoitteena saada julkista tunnustusta omalle paremmuudelle. Näiden erilaisten tavoiteorientaatioiden ajatellaan kehittyvän yksilön koulukokemuksien pohjalta, kulloisenkin kontekstin vaikutuksen alaisina (Linnenbrink, 2007). Tuominen, Pulkka, Tapola ja Niemivirta (2017) esittävät tavoiteorientaatioiden jakamista viiteen eri luokkaan; *oppimis-orientoituneella* on pyrkimys oppia ja kehittyä (vrt. hallintatavoitteet), *saavutusorientoitunut* puolestaan keskittyy menestymiseen ja hyviin tuloksiin, *suoritus-lähestymisorientoitunut* haluaa pärjätä muita paremmin ja menestyä suhteessa muihin (vrt. suoritustavoitteet), *suoritus-välttämisorientoitunut* pyrkii välttämään epäonnistumisia eikä halua näyttää huonolta, ja *välttämisorientoitunut* on passiivinen, pyrkimyksenä välttää kaikkea vaivannäköä. Edellä kuvattu tavoiteorientaatioprofiilien jaottelu viiteen toisistaan eroavaan profiiliin antaa vivahteikkaam-

man kuvan oppijoiden tavoitteisiin liittyvistä orientaatioista. Seuraavaksi keskitytään kuitenkin Linnenbrinkin ja Pintrichin (2002) käyttämään jaotteluun, kun pohditaan eri orientaatioiden ja affektien yhteyttä.

Linnenbrink ja Pintrich (2002) pitävät mahdollisena, että hallintasuuntautunut henkilö voisi menestyä paremmin kuin suoritusorientoitunut. Näin siksi, että edistymisen standardit asetetaan suhteessa itseän ja omaan oppimiseen, mikä puolestaan lisää todennäköisyyttä miellyttävien affektiivisten tilojen kokemiselle. Vaikka edistyminen tavoitteeksi otetussa tehtävässä olisi riittämätöntä, ei hallintasuuntautuneelle opiskelijalle olisi odotettavissa kovinkaan epämiellyttäviä affektiivisiä tiloja, sillä tehtävän jumittaminen olisi tulkittavissa pikemminkin yrityksen puutteeksi kuin omaksi taitamattomuudeksi. Tässä mielessä hallintasuuntautuneisuuden voi nähdä suojelevan opiskelijan minäkäsitystä negatiiviselta arvioinnilta. Linnenbrink ja Pintrich toteavatkin, että hallintasuuntautuneet yksilöt usein näkevät vaikeat tilanteet haastavina, ja nauttivat yrityksistä selviytyä vaikeista tehtävistä, vaikka menestys ei olisikaan taattu. Vastaavasti suoritustavoitesuuntautuneet ovat taipuvaisempia vertaamaan omaa edistymistä vertaisiinsa, mikä voi johtaa suruun, mikäli edistyminen ei ole muita parempaa. Lisäksi ahdistusta saattaa ilmetä, sillä käsitys omasta itsestä ja omasta arvosta on riippuvainen kulloisenkin tavoitteeksi asetetun tehtävän edistymisestä ja suoriutumisesta. Mikäli suoritustavoitesuuntautunut henkilö onnistuu tavoitteessaan, ja onnistuu tuomaan esiin omaa kyvykkyyttään toivomallaan tavalla, seuraa tästä riemun lisäksi ylpeyttä.

Yhteys affektien ja tavoiteorientaatioiden välillä on havaittavissa myös toiseen suuntaan; affektiiviset tilat vaikuttavat tavoitteen asetteluun. Linnenbrinkin ja Pintrichin (2002) mallin mukaan miellyttävien affektien kokeminen saattaa edistää lähestymistavoitteiden asettamista välttämistavoitteiden sijaan, mutta ei erottele hallinta- ja suoritussuuntauksia. Miellyttäviä affekteja kokevat opiskelijat saattavat siten todennäköisemmin valita tavoitteen lähestymisen ymmärtääkseen tai tuodakseen julki omaa osaamistaan. Päinvastoin epämiellyttäviä affekteja kokevat opiskelijat saattavat tuntea, ettei heillä ole tarpeeksi voimavaroja lähestyä tiettyä tavoitetta. Nämä opiskelijat saattavat keskittyä yrityksiin välttää epätoivottuja lopputuloksia. Schwarz (1990) esittää, että epämiellyttävät affektit saattavat viestittää kokijalleen mahdollisesta uhasta, joka voi johtaa uhkaavan tilanteen välttelyyn tai pyrkimykseen estää uhkaavien tilanteiden esiintyminen.

Martinez-Sierra ja del Socorro Garcia-Conzalez (2016) tutkivat Lineaarialgebran kurssilaisten kokemia tunteita laadullisin menetelmin haastattelemalla opiskelijoita. Heidän mukaansa opiskelijan itselleen asettamien tavoitteiden *saavuttaminen* on keskeisessä osassa emootioiden synnylle. Tutkimuksen mukaan opiskelijoiden kokemat tunteet Lineaarialgebran kurssilla olivat tyydytyksen ja pettymyksen emootiot, pelon tunteet, stressin kokemukset sekä itsesyytökset. Kurssiin liittyvät emootiot liittyivät opiskelijoiden haastattelujen mukaan kurssin oletettuun vaikeuteen, ongelmanratkaisuun, kysymysten esittämiseen luokassa, ratkaisujen esittämiseen liitutaululla ja kurssin läpäisemiseen. Tutkimukseen osallistui 27 opiskelijaa, ja heistä 13 oli reputtanut ainakin yhden kahdesta kurssista. Tämä saattaa selittää tulosten negatiivisten tunteiden painottumista.

4.4.2 Tavoiteorientaatiot ja valenssi

Linnenbrink kumppaneineen tutki korrelaatiotutkimusten sarjassa Pintrichin kanssa kehittämänsä edellisessä alaluvussa esitettyä mallia (Linnenbrink, 2007). Opiskelijoiden tavoiteorientaatio tiettyyn tehtävään mitattiin, ja heidän tehtävän suorittamisen aikana herääviä affektiivisia tiloja tutkittiin. Tehtävänä oli muun muassa matemaattisia ongelmia, sekä fysiikan tekstikappaleen lukemista. Tutkimukset sisälsivät oppilaita ja opiskelijoita eri luokka-asteilta; alakoulun ylimmiltä luokilta, yläkouluikäisiä ja yliopiston alkuvaiheessa olevia. Kaikissa tutkimuksissa hallintasuuntautuneisuus oli positiivisesti yhteydessä miellyttäviin affekteihin, ja negatiivisesti yhteydessä epämiellyttäviin affekteihin (Linnenbrink, 2007). Suurimmassa osassa tutkimuksia ei onnistuttu erottamaan edellä esitellyn Feldman Barrettin ja Russellin affektien kehämallin mukaisia aktivaation eri tasoja. Linnenbrink (2007) kuitenkin tiivistää, että muutama tutkimus antoi viitteitä siitä, että hallintasuuntautuneisuus on yhteydessä lisääntyneisiin positiivisiin aktivoiviin affekteihin kuten innostuneisuuteen, ja vähentyneisiin negatiivisiin aktivoiviin affekteihin kuten ahdistuneisuuteen. Lisäksi yläkouluikäiset, lukusarjoja ratkovat, hallintasuuntautuneet oppilaat, kertoivat tuntevansa itsensä enemmän iloisiksi kuin surullisiksi, enemmän rauhallisiksi kuin jännittyneiksi, ja enemmän innostuneeksi kuin väsyneeksi. Tämä tukee Feldman Barrettin ja Russellin mallia, sillä edellä kuvatut affektiparit ovat mallissa toistensa vastakohtia. Suoritus-suuntautuneisuuden osalta tulokset eivät ole yhtä selkeitä, ja onkin mahdollista,

että tämän taustalla on vielä tuntemattomia välittäviä tekijöitä tai että oman kyvykkyyden korostamisen tarpeen aste vaihtelee.

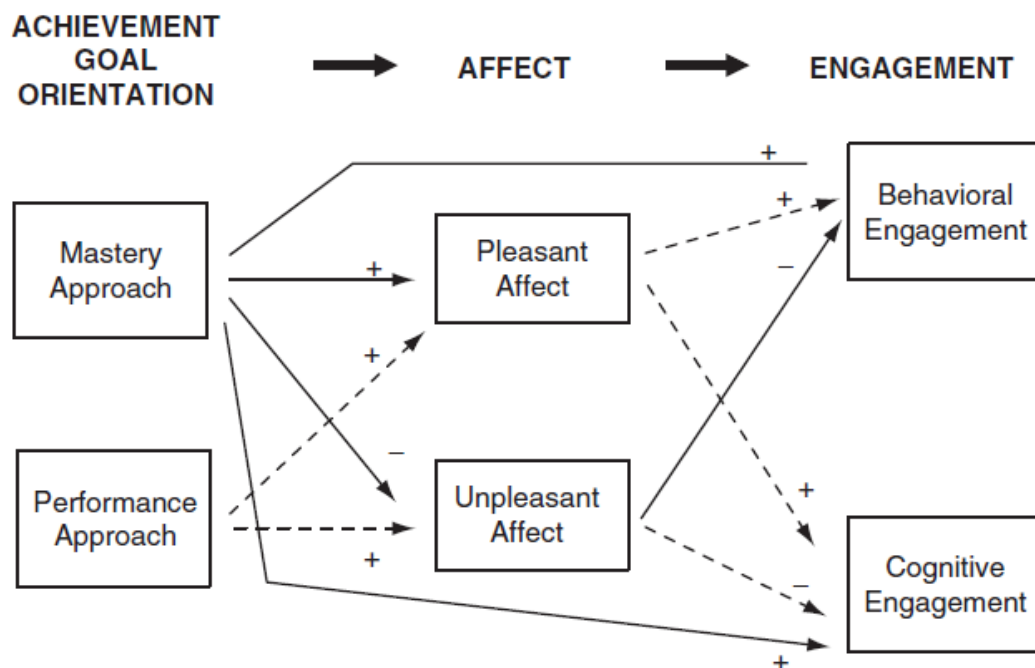
4.4.3 Motivaatio, affekti ja sitoutuminen

Linnenbrink (2007) kehitti affekteja ja motivaatiota koskevaa, Pintrichin (2002) kanssa luomaansa, mallia yhdistämään kouluun ja tehtävään sitoutumista. Sitoutumisen Linnenbrink jakaa *behavioraaliseen* ja *kognitiiviseen* sitoutumiseen. Behavioraalinen sitoutuminen viittaa vaivannäköön ja sinnikkyyteen, ja siinä huomion kohteena on sitoutumisen määrä. Kognitiivinen sitoutuminen puolestaan viittaa ajattelun laatuun erilaisten kognitiivisten strategioiden käytön (esim. harjoittelu, asian työstäminen mielessä, oppimisen itsesäätely, metakognitiivisten strategioiden käyttö) mielessä.

Linnenbrinkin mukaan empiirinen näyttö affektien ja behavioraalisen ja kognitiivisen sitoutumisen suhteesta on myös vaikeasti tulkittavissa, sillä eri affektit johtavat erilaisiin polkuihin sitoutumisen suhteen. Pekrun, Goetz, Titz ja Perry (2002) tutkivat affektien ja kognitiivisten prosessien yhteyttä. He päätyivät positiivisten aktivoivien emootioiden olevan yhteydessä vaivannäköön toisin kuin negatiivisten emootioiden. Negatiivisista emootioista kuitenkin ei-aktivoivien, kuten tylsistymisen, yhteys matalampaan vaivannäköön oli selvempi kuin aktivoivilla tunteilla, kuten suuttumuksella ja ahdistuksella. Lisäksi positiiviset aktivoivat emootiot yhdistyivät joustaviin ajattelutapoihin, yhteyksien luomiseen, ja taipumukseen sitoutua metakognitiivisiin strategioihin. Negatiiviset emootiot puolestaan yhdistyivät enemmän oppimisen ulkoiseen kuin itsenäiseen säätelyyn ja olivat negatiivisesti yhteydessä opittavan asian aktiiviseen mielessä työstämiseen eli elaboraatioon.

Linnenbrinkin (2007) malli (kuva 14) ehdottaa, että affektit olisivat välittäviä tekijöitä erilaisten tavoiteorientaatioiden ja tehtävään ja kouluun sitoutumisen välillä. Hänen mukaansa on jonkin verran näyttöä sille, että epämiellyttävien affektien vähentyminen yhdistettynä hallintasuuntautuneeseen tavoiteorientaatioon selittäisi tämän orientaation hyödyllisyyttä oppimisen kannalta. Tämä vaikuttaa kuitenkin olevan ainoa tilanne, jossa affekti toimisi välittävänä tekijänä orientaation ja sitoutumisen välillä. Enemmän tukea Linnenbrinkin mukaan on edellis-

ten alalukujen tuloksiin, joiden mukaan siis opiskelijan erilaiset tavoitteet ennustavat erilaisia affekteja; hallintasuuntautunut tavoiteorientaatio yhdistyy lisääntyneisiin positiivisiin affekteihin ja vähentyneisiin epämiellyttäviin affekteihin, kun puolestaan suorituserientaatio näyttää lisäävän aktivoivia negatiivisia affekteja. Lisäksi sitoutumisesta tiedetään, että epämiellyttävät affektit heikentävät behavioraalista sitoutumista, ja jonkin verran näyttöä on sille, että positiiviset ja aktivoivat affektit ovat yhteydessä sekä behavioraaliseen että kognitiiviseen sitoutumiseen. Linnenbrink päätyy siihen, että hallintasuuntautuneiden tavoiteorientaatioiden korostaminen luokahuoneissa edistäisi emotionaalista hyvinvointia lisäämällä miellyttäviä affekteja ja vähentämällä epämiellyttäviä. Lisäksi neutraalit ja positiiviset affektiiviset tilat näyttävät olevan hyödyllisempiä opiskelijan behavioraalisen ja kognitiivisen sitoutumisen kannalta, ja näitä tulisi sen vuoksi vaalia. Hänen mukaansa negatiivisten affektien mahdollisia hyödyllisiä vaikutuksia olisi kuitenkin syytä tutkia lisää.

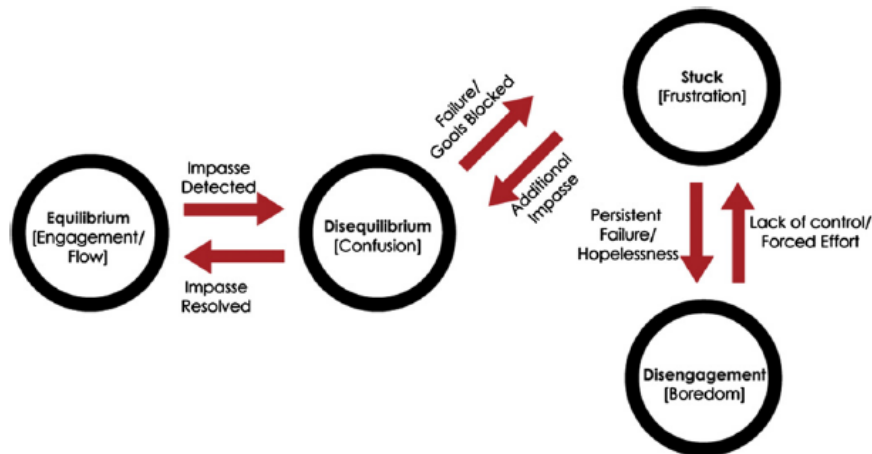


Kuva 14. Linnenbrinkin (2007) malli motivaatiosta, affekteista ja sitoutumisesta. Tummennetut viivat johdonmukaisissa tuloksissa, katkoviivat epäjohdonmukaisissa. Lähde: Linnenbrink, 2007.

4.5 Erilaisista tunteista ja oppimisstrategioista

4.5.1 Tunteiden vaihtelu ja syvälinen oppiminen

D'Mello ja Graesser (2012) tutkivat tunteiden vaihtelua yliopisto-opiskelijoilla n.30 minuuttia kestävän, tietokoneella tehtävän, monimutkaisen oppimistapahtuman aikana. He kuvaavat mallin, jossa esitellään syvälinen oppimiseen liittyviä affektiivisia tiloja ja niiden vaihtelua (kuva 15). Mallin mukaan oppimistehtävään sitoutuneessa, flow-tilassa opiskelijan kokemat vastoinkäymiset aiheuttavat kognitiivisen epätasapainotilan ja hämmennystä. Mikäli opiskelija kykenee ajattelun, reflektion ja ongelmanratkaisun avulla palauttamaan kognitiivisen tasapainotilan, hän palaa affektiivisesti sitoutuneeseen flow-tilaan. Jos tasapainotilaa ei saavuteta, ja vastoinkäymiset estävät tavoitteen saavuttamisen, laukaisee tämä turhautumisen kokemuksen, joka lopulta johtaa tylsistymiseen, mikäli tasapainotilaa ei edelleenkään saavuteta. D'Mello ja Graesser toteavat, että monimutkainen opiskelutapahtuma todella on emotionaalisesti latautunut tilanne. Opiskelijoiden tunteet eivät myöskään vaihtele oppimistilanteessa satunnaisesti, vaan opiskelijan kokemien affektiivisten tilojen vaihtelun takana näyttää olevan tiettyä systemaattisuutta, jota heidän kehittämänsä malli pyrkii kuvaamaan. Malli tukee huomiota, jonka mukaan sitoutuneessa tilassa oleva opiskelija on jatkuvasti haastettuna optimaalisen oppimisen vyöhykkeellä, ja kokee sekä hämmennystä että oivalluksia. D'Mello ja Graesser määrittelevät nämä sitoutumis/flow-hämmennys-sitoutumis/flow-syklit hyödyllisiksi oppimisen kannalta, erotuksena tylsistymisen ja turhautumisen muodostamista, oppimisen kannalta haitallisista oskillaatioista. Mallin mukaan siis oppimisympäristöjen tulisi jatkuvasti haastaa opiskelijaa kehittämään kriittistä ajattelua ja syvälinen oppimisen taitoja. Oppiminen mukavuusalueella passiivisilla menetelmillä ei tuota syvälistä oppimista.



Kuva 15. D'Mellon ja Graesserin malli affektiivisten tilojen vaihtelusta monimutkaisen oppimistapahtuman aikana. Lähde: D'Mello&Graesser, 2012.

4.5.2 Kontrolli, arvostus ja tunteet oppimisstrategioiden taustalla

Di Leo, Singh, Muis ja Psaradellis (2019) tutkivat emootioiden vaihtelua ja roolia matemaattiseen ongelmanratkaisuun liittyen viides- ja kuudesluokkalaisilla. Heidän mukaansa kontrollin tunne ja tehtävän arvostus ennustivat oppilaiden ongelmanratkaisun aikana koettuja tunteita, tunteet ennustivat kognitiivisia ja metakognitiivisia oppimisstrategioita, jotka edelleen ennustivat oppilaan suoriutumista. Tutkimuksen mukaan yleisimmin ilmenevät tunteet ongelmanratkaisuun liittyen olivat turhautuminen ja hämmennys. Kun tunnekokemuksia analysoitiin vaiheittain, havaittiin, että turhautuminen muuttui usein negatiivisiksi tunteiksi. Hämmennys muuttui myös ensisijaisesti negatiiviseen suuntaan turhautuneisuudeksi, kyllästyneisyydeksi tai ahdistuneisuudeksi, mutta mikäli hämmäntävä asia ratkesi, seurasi tästä positiivisia tunteita. Di Leo ym. toteavat, että tulokset ovat samansuuntaisia, kuin D'Mellon ja Graesserin (2012) tutkimuksessa. Tästä voi päätellä, että D'Mellon ja Graesserin malli pätee myös perusasteen opiskelijoille, ja erityisesti, että hämmennys voi olla tuottavaa tai tuhoavaa myös nuoremmille opiskelijoille. Di Leo kumppaneineen (2019) argumentoi, että kun D'Mellon ja Graesserin kuvaamat epävarmuuden tunteet heräävät, ne ennustavat yksilön käyttämiä kognitiivisia ja metakognitiivisia oppimisstrategioita. Erityisesti kognitiivisen epäjohdonmukaisuuden kokemusten, uteliaisuuden, yllättyneisyyden sekä

hämmentyneisyyden tulisi johtaa korkeamman asteen kognitiivisten ja metakognitiivisten strategioiden käyttöön epäselvyyksien ratkaisemiseksi, jolloin seurauksena olisi syvälinen oppiminen. Ahdistuksen, tylsistymisen ja turhautumisen sitä vastoin ajatellaan johtavan madaltuneeseen tiedonkäsittelyn kapasiteettiin, sillä negatiiviset tunteet kuluttavat kognitiivisia voimavaroja (vrt. Mandlerin ja McLeodin näkemykset). Tämä saattaa heidän mukaansa johtaa hyödyllisten, ponnisteluja vaativien strategioiden vähenemiseen, sillä edellä kuvattujen negatiivisten tunteiden on osoitettu johtavan sellaisten kognitiivisten ja metakognitiivisten oppimisstrategioiden käyttöön, jotka vaativat vähemmän kognitiivisia resursseja (kuten ulkoamuistaminen).

4.5.3 Positiiviset tunteet ja oppiminen

Villavicencio ja Bernardo (2016) esittävät, että affekteja sekä oppimismotivaatiota ja saavutuksia käsittelevät tutkimukset ovat keskittyneet enimmäkseen opiskelijoiden kokemiin negatiivisiin tunteisiin. He tutkivat 15-25 -vuotiaita opiskelijoita koettuja akateemisia tunteita, sekä pystyvyysuskoa ja itsesääätelyä kartoittavalla kyselyllä, ja heidän trigonometriasta saamiaan arvosanoja. Heidän mukaansa opiskelijoiden nautinnon ja ylpeyden kokemukset selittivät huomattavan osan arvosanan, pystyvyyden ja itsesääätelyn vaihtelusta trigonometrian tunneilla, silloinkin, kun sukupuoli ja ahdistus oli kontrolloitu. Sekä nautinto että ylpeys olivat positiivisesti yhteydessä pystyvyysuskoon ja itsesääätelyyn. He pohtivat, että opettajien olisi hyvä arvostaa näitä opiskelijoiden kokemia positiivisia tunteita, ja luoda mahdollisuuksia näiden tunteiden kokemiselle. Esimerkiksi matematiikan opetuksen kontekstissa on heidän mukaansa hyödyllistä, mikäli opiskelija nauttii oppimisaktiviteeteista, sillä silloin tehtävään sitoutuminen ja kokemukset omasta pystyvyydestä paranevat. He huomauttavat kuitenkin, ettei tuloksista voi päätellä positiivisten tunteiden ja suoriutumisen kausaalista yhteyttä. Tulokset kuitenkin antavat kuvan siitä, että positiivisiin tunteisiin keskittyminen matematiikanopetuksen yhteydessä voi luoda tasapainoisemman kuvan matematiikkaan liittyvistä affektiivisista tiloista, kuin pelkkä ahdistukseen keskittyminen.

Villavicencio ja Bernardo kuitenkin toteavat, että vaikka sekä ylpeys että nautinto ovat molemmat positiivisesti yhteydessä oppimiseen, ovat näiden kahden

eri tunteen ”psykologiset polut” toisistaan selvästi eroavat. Pekrunin (2006) mukaan nautinto liittyy tehtävän tekemiseen, itse oppimisaktiviteettiin, ylpeys puolestaan lopputulokseen, kun oppimiseen liittyvä suoritus täyttää opiskelijan itselleen asettamat standardit.

5 Tutkimustehtävä ja tutkimuskysymykset

Tämän tutkimuksen tutkimustehtävänä on kuvata, analysoida ja tulkita matemaattisen todistamisen oppimiseen liittyviä tunteita. Oppijan kokemat tunteet voivat joko edistää tai ehkäistä oppimista. Opetuksen tavoitteena myös matemaattisen todistamisen opetuksen kohdalla yliopistossa tulisi olla oppimisen kannalta hyödyllisten tunteiden edistäminen. Tämä on haasteellista, sillä johdantokursseilla on suuret osallistujamäärät, ja satojen opiskelijoiden osaaminen ja motivaatio matemaattisen todistamisen oppimiseen vaihtelee suuresti. Tämän tutkimuksen tavoitteena on syksyn 2019 Johdatus yliopistomatematiikkaan -kurssilaisten vastausten perusteella luoda näkemystä siitä, millaisia tunteita opiskelijat ovat kokeneet matemaattisia todistuksia harjoitellessaan, miten he tunteitaan perustelevat, ja miten opiskelijoiden tunteet sekä asenteet matemaattista todistamista ja sen oppimista kohtaan ovat kurssilla kehittyneet tai muuttuneet. Tavoitteena on myös selvittää, millaisen kuvan opiskelijoiden kokemien tunteiden jaottelu valenssin ja aktivaation avulla antaa Johdatus yliopistomatematiikkaan -kurssiin liittyvistä affekteista. Tutkimuskysymykset ovat seuraavat:

1. Mitä tunteita Johdatus yliopistomatematiikkaan -kurssilaiset raportoivat kokeneensa matemaattisiin todistuksiin liittyen? Mitkä olivat yleisimmin koetut tunteet? Mihin todistamisen tilanteisiin yleisimmin koetut tunteet liittyivät tai miten opiskelijat selittivät näitä tunteita? Mihin muihin tunteisiin yleisimmin koetut tunteet liittyivät?
2. Mitä opiskelijoiden kokemien tunteiden jaottelun valenssin ja aktivaation ulottuvuuksien avulla voi nähdä kertovan todistamisen oppimiseen liittyvistä tunteista Johdatus yliopistomatematiikkaan -kurssilla? Millä eri keinoilla negatiivisia tunteita kokeneet opiskelijat kokivat selviytyneensä?
3. Miten opiskelijoiden asenteet todistamista kohtaan muuttuivat kurssin kuluessa?

6 Tutkimuksen toteutus

Tässä luvussa kuvataan tutkimusote, tutkimuksen kohderyhmä sekä aineiston analyysimenetelmät.

6.1 Tutkimuksen kohderyhmä ja tutkimusmenetelmä

Tämän tutkimuksen kohteena ovat 440 syksyllä 2019 Helsingin yliopistossa Johdatus Yliopistomatematiikkaan -kurssille osallistuneet. Tämän pro gradun aineisto on osa isompaa opetuksen kehittämisen tutkimushanketta, jossa muun muassa suunniteltiin ja toteutettiin Johdatus Yliopistomatematiikkaan -kurssille uusia tietokoneavusteisia harjoitustehtäviä ja kehitettiin todistamiseen liittyviä asenteita kartoittavaa mittaria. Helsingin yliopiston matematiikan ja tilastotieteen osaston matematiikan opetuksen tutkimusryhmä (vastuullinen tutkija Johanna Rämö) on myöntänyt käyttöni kyseisen aineiston todistamiseen liittyviä tunteita käsittelevän osan. Aineisto kerättiin 10.12.2019- 30.12.2019 välisenä aikana kurssin sähköisellä Moodle-alustalla, ja kyselyssä selvitettiin seuraavat taustatiedot:

- 1) sukupuoli (Mies/Nainen/Muu/En halua ilmoittaa)
- 2) matematiikan arvosana ylioppilaskirjoituksissa
- 3) matematiikan ylioppilaskirjoitusten vuosi
- 4) onko kirjoittanut lyhyen vai pitkän matematiikan
- 5) matematiikan ylioppilaskirjoituksiin osallistumattomien korkein yliopistoa edeltävä matematiikan suoritus ja arvosana.

Avokysymyksiä oli kaksi:

- 1) Millaisia tunteita koet, kun sinun on todistettava jotain matematiikassa?
- 2) Mitä olet oppinut todistamisesta tällä kurssilla?

Kysely kuului pakollisena osana kurssisuoritukseen. Vastaajista miehiä oli 255 (58%) ja naisia 173 (39%), muita 3 (<1%) ja 9 (2%) ei halunnut ilmoittaa sukupuoltaan. Pitkän matematiikan lukiossa suorittaneita oli 318 (72%), lyhyen 71

(16%). Vastaajat olivat suorittaneet YO-tutkintoja vuosina 1966-2019. Vastaajajoukossa oli myös 42 (9,5%) taustatietokysymykseen 5 vastannutta henkilöä, joiden korkein matematiikan suoritus vaihteli matematiikkaolympialaisten kunniamaininnasta peruskoulun arvosanaan 7. Ylioppilaskirjoitusten arvosanat vaihtelivat I:stä L:n, hyviä arvosanoja oli kuitenkin selvästi enemmän. Ylioppilaskirjoitusten parhaan arvosanan, Laudaturin, oli kirjoittanut 98 (22%) opiskelijaa.

Tutkimusmenetelmä on kvalitatiivinen. Tutkimuskysymyksiin etsittiin vastausta laadullisen sisällönanalyysin keinoin analysoimalla opiskelijoiden vastauksia tunteita ja todistamista koskevaan avokysymykseen. Tutkimuksessa hyödynnetään myös aineiston kvantifiointia, ja tämän määrällisen tarkastelun tarkoitus on syventää laadullisen aineiston ymmärrystä ja auttaa kestävien johtopäätösten tekemisessä.

6.2 Aineiston analyysimenetelmä

Tässä alaluvussa esitellään valittua analyysimenetelmää, sekä selostetaan sen soveltaminen tähän tutkimukseen.

6.2.1 Laadullinen sisällönanalyysi

Avointa kysymystä 1 koskeva, opiskelijoiden todistamiseen liittyviä tunteita kartoittava, aineisto analysoitiin laadullisella sisällönanalyysillä. Tuomi ja Sarajärvi (2009, s. 91) kertovat laadullisen sisällönanalyysin sopivan kaikkiin laadullisen tutkimuksen perinteisiin. Metodin lisäksi sisällönanalyysi voidaan nähdä teoreettisena viitekehyksenä, ja yleensä sillä tarkoitetaan kirjoitettujen, kuultujen tai nähtyjen sisältöjen analyysia. Sisällönanalyysi voi liittyä myös kvantitatiivisiin analyysimenetelmiin. Tässä tutkimuksessa Johdatus yliopistomatematiikkaan -kurssilaisten avoimia vastauksia analysoitiin tutkimustehtävän mukaisesti erityisesti tunteiden näkökulmasta. Sisällönanalyysin eräs hyvä puoli on se, että se sopii yksinkertaisena metodina aloittelijalle (Tuomi ja Sarajärvi, 2018, s. 145). Metodilla on myös omat haasteensa, joista Tuomi ja Sarajärvi (2018, s. 145-146) mainitsevat seuraavan kaltaisia, tutkimukseen ja sen tekemiseen liittyviä tilanteita.

Ensinnäkin ongelmana saattaa olla se, että tutkija on ”tekevinään analyysia”; esimerkiksi saatuja avovastauksia järjestellään, ja tuloksena esitellään, mitä on vastattu. Lyhyet vastaukset lomakekyselyn avoimiin kysymyksiin saattavat aiheuttaa tällaisen ongelman. Lisäksi analyysin ”löysyys” saattaa puolestaan vaikeuttaa luokittelua, mikäli luodut pääluokat ovat päällekkäisiä, eivätkä erotu toisistaan selkeästi. Aineiston ja analyysin tulee myös olla keskenään linjassa ja luokkien olla perusteltavissa aineistosta. Sisällönanalyysissa saattaa myös käydä niin, etteivät tulokset vastaakaan tutkimuskysymyksiin. Nämä kaikki analyysin löysyydet ovat kuitenkin yleensä korjattavissa laadittaessa tutkimuksesta raporttia.

Laadullinen sisällönanalyysi valittiin tämän tutkimuksen menetelmäksi sen vuoksi, että opiskelijoiden kirjoittamat avoimet vastaukset olivat hyvin monipuolisia ja yksilöllisiä, ja niiden laadullinen analyysi vaikutti luontevalta lähestymistavalta. Laadullinen menetelmä sattui myös olemaan tämän pro gradun kirjoittajan haaveena, ja onkin hienoa, että kyseinen aineisto antoi siihen mahdollisuuden.

6.2.2 Analyysi tutkimuskysymyksittäin

Ensimmäiseen tutkimuskysymykseen etsittiin vastausta sekä *sisällön erittelyn* että *aineistolähtöisen sisällönanalyysin* ja luokittelun keinoin. Tuomen ja Sarajärven (2009, s. 106) mukaan sisällön erittelyllä tarkoitetaan analyysia, jossa pääpaino on kvantitatiivisella sisällön kuvaamisella. Tämä on heidän mukaansa erottettava sanallisesta sisällön kuvaamisesta eli sisällönanalyysista. Kuitenkin yhdysvaltalaisen laadullisen tutkimuksen perinteessä käsite sisällönanalyysi sisältää sisällön erittelyn (Tuomi ja Sarajärvi, 2009, s.107). Tässä tutkimuksessa sisältöä sekä eritellään, muun muassa puhuttaessa tunteiden yleisyydestä, että esitellään sanallisesti.

Tuomi ja Sarajärvi (2009, s. 110) kertovat sisällönanalyysissa olennaista olevan *analyysiyksikön* määrittämisen. Cavanaghin (1997) mukaan tutkimustehtävä ja itse aineisto ovat keskeiset analyysiyksikköä määrittävät tekijät. Tässä tutkimuksessa analyysiyksikkönä oli yhden opiskelijan vastaus, joka mahdollisti kunkin vastauksen mahdollisimman syvällisen analysoinnin. Analyysiyksikkönä olisi voinut toimia myös yksittäiset tunnesanat, mutta tällöin tärkeää tietoa olisi kadonnut, sillä osa opiskelijoista kuvasi tunteitaan todistamiseen liittyen monipuolisemmin kuin vain yksittäisillä sanoilla.

Jokaisesta opiskelijan pelkistetystä vastauksesta etsittiin käytetyt tunneilmaisut. Tunneilmaisuiksi määriteltiin kaikki opiskelijoiden antamat, tunteeksi tulkittavissa olevat sanat ja ilmaisut. Vastaaja sai siis itse määritellä, minkä ymmärtää tunteeksi, esimerkiksi ”onnistumisen tunne” tai ”tunnen itseni älykkääksi” määriteltiin tunteiksi ”onnistuminen” ja ”älykäs”. Nämä Johdatus yliopistomatematiikkaan -kurssilaisten kokemat *todistamiseen liittyvät tunteet* esitellään luvussa 7.1.1.

Yleisimmin koettuja tunteita selvitettäessä samaa tunnetta kuvaavat eri sanat luokiteltiin yhteen, esimerkiksi mielenkiinto/kiinnostus, into/innostus/innostuneisuus ja mielihyvä/hyvä mieli tulkittiin samaksi tunteeksi. Toisaalta sävyltään hie-
man eroavat, mutta samantyylliset sanat saatettiin myös luokitella yhteen, mikäli mainintoja niistä oli niukasti. Esimerkkinä tästä voisi mainita alemmuuden, arvottomuuden, riittämättömyyden ja tyhmyyden tunteet. Kun tunteita tulkittiin ja ryhmiteltiin edellä kuvatulla tavalla aineistolähtöisen laadullisen sisällönanalyysin avulla, päädyttiin ensin yhteensä 82 erilaiseen, tiettyä tunnetta kuvaavaan luokkaan, josta vielä saman tyyppisiä tunteita ryhmittelemällä 45 luokkaan. Liitteissä 1-3 esitellään vaihteittainen tunteiden yhteen luokittelu ja luokkien nimeäminen. Lopuksi jokaisen mainitun tunneilmaisun kohdalta laskettiin, montako kertaa kyseinen tunne esiintyi aineistossa. *Yleisimmin koetuiksi tunteiksi* hyväksyttiin tunneilmaisut, jotka olivat esiintyneet aineistossa yli 30 kertaa.

Yleisimmin koettuja tunteita ja niihin liittyviä todistamisen tilanteita selvitettiin keräämällä kutakin tunnetta sisältäneet opiskelijoiden vastaukset yhteen, ja etsimällä näistä aineistolähtöisesti perusteluita sille, miksi todistaminen oli aiheuttanut näitä tunteita. Mikäli vastauksesta ei käynyt ilmi, missä todistamisen tilanteessa kyseistä tunnetta usein koetaan, päädyttiin tutkimaan, miten opiskelijat muuten *selittivät* kyseistä tunnetta. Samalla selvitettiin myös, *mihin muihin tunteisiin yleisimmin koetut tunteet liittyivät*, sillä tunteita perusteltiin usein muilla tunteilla; esimerkiksi haaste ja mielenkiinto tai onnistuminen ja oivallukset näyttivät liittyvän yhteen. Analyysi näihin kysymyksiin liittyen eteni siis muodostamalla tiettyyn tunteeseen liittyvistä opiskelijoiden vastauksista luokkia, joissa sama teema tai asia toistui. Esimerkiksi mielenkiinnon tunteesta muodostettiin luokat *mielenkiinto haasteeseen liittyen*, *mielenkiinto ja positiiviset tunteet* ja *mielenkiinto ja todistamisen aloitus*. Tutkimuskysymykset saivat lopullisen muotonsa vasta analyysin jälkeen.

Toiseen tutkimuskysymykseen vastausta etsittäessä opiskelijoiden kokemat tunteet luokiteltiin käyttämällä aineiston tuntemisen lisäksi apuna luvussa 4.3 esiintyvää tunteiden nelikenttämallia. Näin muodostuvat luokat ovat siis *positiiviset aktivoivat*, *negatiiviset aktivoivat*, *positiiviset ei-aktivoivat* ja *negatiiviset ei-aktivoivat* tunteet. Yksi opiskelija saattaa kuulua yhteen tai useampaan luokkaan sen mukaan, millaisia tunteita hän raportoi kokeneensa kurssilla todistamiseen liittyen. Näistä yläluokista muodostettiin edelleen kokoavat luokat: oppimisen kannalta hyödylliset ja haitalliset tunteet. *Oppimisen kannalta hyödyllisiksi tunteiksi* määriteltiin sekä positiiviset että negatiiviset aktivoivat tunteet, ja *haitallisiksi* vastaavasti positiiviset ja negatiiviset ei-aktivoivat tunteet Feldman Barrettin ja Russellin mallin (1998) pohjalta. Toisen tutkimuskysymyksen osalta analyysin voidaan edellä kuvatun perusteella nähdä olevan *teoriaohjaava sisällönanalyysi* (Tuomi ja Sarajärvi, 2018, s.133). Teoriaohjaava sisällönanalyysi etenee aineistolähtöisen analyysin mukaan aineiston pohjalta, varsinkin analyysin alkuvaiheessa. Erona on se, miten teoreettiset käsitteet muodostuvat. Kun aineistolähtöisessä analyysissä käsitteet nousevat aineistosta, teoriaohjaavassa nämä käsitteet tuodaan valmiina, jonkin tietyn olemassa olevan teorian pohjalta. (Tuomi ja Sarajärvi, 2018, s. 133.) Tässä tutkimuksessa keskeinen analyysia ohjaava teoria on siis Feldman Barrettin ja Russellin (1998) malli affektiivisesta kentästä. On tärkeää huomata, että tutkimuksen tässä osassa tavoitteena oli ensinnäkin tiivistää edellä saatuja tuloksia helposti omaksuttavaan muotoon, ja toiseksi saada näkemystä siitä, millaisen kuvan valenssi-aktivaatio-jaottelu antaa oppimisen kannalta hyödyllisistä ja haitallisista tunteista Johdatus yliopistomatematiikkaan -kurssilla. Saadut tunteet luokiteltiin nelikenttään teoriaohjaavasti sekä affektien nelikenttämallin, että tästä aineistosta tulkitun perusteella. Esimerkiksi haasteen tunne luokiteltiin kuuluvaksi positiiviseksi ja aktivoivaksi tunteeksi, sillä suurin osa haasteen tunnetta kuvailleista puhui haasteesta positiivisena. Kuitenkin pieni osa haasteen tunteeseen liittyvistä vastauksista (8kpl) näki haasteen negatiivisena. Tällaisia yksilöllisiä eroja ei ollut mahdollista huomioida tutkimuksen tässä osassa, vaan niihin keskityttiin yleisimpien tunteiden osalta ensimmäisessä tutkimuskysymyksessä. Täten opiskelijoiden raportoitujen tunteiden jaottelu nelikenttään on suuntaa antava muiden kuin yleisimmin koettujen tunteiden

osalta. Kuitenkin jokaisen tunteen nelikenttään sijoittaminen on syntynyt syvällisen aineistoon perehtymisen, tutkijan pohdintojen, sekä Feldman Barrettin ja Russellin mallin avulla.

Selvitettäessä opiskelijoiden vastauksista heidän käyttämiään mahdollisia *selviytymiskeinoja* negatiivisten tunteiden yhteydessä edettiin jälleen aineistolähtöisesti. Erilaisia selviytymiskeinoja kuvanneiden opiskelijoiden vastauksista kerättiin yhteen ne, joista oli tulkittavissa opiskelijoiden ajatuksia ja käytäntöjä silloin, kun todistamiseen liittyi negatiivisia tunteita. Nämä selviytymiskeinoja kuvaavat vastaukset luokiteltiin esiin nousseiden teemojen mukaan kymmeneen eri luokkaan, jotka esitellään tarkemmin tuloksissa.

Tutkimuskysymystä kolme lähestyttiin ensimmäisen tutkimuskysymyksen tapaan aineistolähtöisen sisällönanalyysin keinoin etsimällä niiden opiskelijoiden vastaukset, joissa puhuttiin muutoksesta opiskelijan tunteissa tai asenteissa kurssin aikana. Vain harvassa vastauksessa (yht. 16 kpl) oli tulkittavissa viitteitä siitä, että asenteet kurssin kuluessa olisivat muuttuneet. Tämä on hyvin ymmärrettävää, sillä opiskelijoilta ei eksplisiittisesti kysytty muutoksesta. Tutkija kuitenkin näki nämä vastaukset huomionarvoisina, sillä ne osaltaan kuvaavat koulutuksen ja affektien monimutkaista vuorovaikutussuhdetta, jota olisi mielenkiintoista tutkia lisää. Nämä vastaukset analysoitiin ja luokiteltiin sisällön perusteella *positiivisiin*, *lieventyneisiin* ja *negatiivisiin*. Nämä luokat esitellään tarkemmin seuraavassa luvussa tulosten yhteydessä.

7 Tutkimustulokset ja niiden tulkintaa

Tässä luvussa esitellään tutkimuksen tulokset tutkimuskysymyksittäin, ja tulkitaan saatuja tuloksia. Kukin alaluku vastaa yhteen tutkimuskysymykseen.

7.1 Todistaminen ja tunteet Johdatus yliopistomatematiikkaan -kurssilla

Tässä alaluvussa luodaan näkemystä syksyn 2019 Johdatus yliopistomatematiikkaan -kurssilaisten todistamiseen liittyvistä tunteista. Luku vastaa ensimmäiseen tutkimuskysymykseen, jossa selvitettiin opiskelijoiden kokemia tunteita ja niiden yleisyyttä. Lisäksi mielenkiinnon kohteena olivat todistamisen tilanteet, joissa yleisimmät tunteet ilmenevät, yleisimpiin tunteisiin liittyvät muut tunteet, sekä se, miten opiskelijat selittivät kokemiaan tunteita.

7.1.1 Opiskelijoiden kokemat todistamiseen liittyvät tunteet

Opiskelijat raportoivat runsaasti erilaisia tunteita ja tunneilmauksia, selittivät tunteitaan omin sanoin, analysoivat todistamiseen liittyvien tunteiden syitä, ja esittivät mielipiteitään todistamisesta ja sen merkityksestä.

Taulukossa 6 näkyy opiskelijoiden kokemista tunteista muodostetut alaluokat ja kunkin alaluokan saama mainintojen lukumäärä aineistossa.

Taulukko 6. Opiskelijoiden kokemien tunteiden muodostamat alaluokat ja niiden lukumäärällinen esiintyvyys aineistossa.

tunne	mainintojen lukumäärä aineistossa
haaste	81
epävarmuus	70
mielenkiinto	69
turhautuminen	65
neutraali	64
vaikeus ja hankaluus	50
onnistuminen	38
voimakas mielihyvä	36
ilo	34
innostus	30
jännitys	30
hämmennys	29
oivallus	28
voimavarojen riittämättömyys	27
ahdistus	26
negatiivisia	26
laimea mielihyvä	24
positiivisia	23
epätoivon tunteet	21
riittämättömyyden ja alemmuuden tunteet	18
palkitsevuus	18
pelko ja kauhu	17
pettymyksen tunteet	15
ärtymys	15
hermostuneisuus	14
keskittyneisyys	13
virtauksen kokemukset	12
turhuuden tunteet	10
varmuuden tunteet	10
hauskuus	9
epätietoisuuden kokemukset	8
laaja kirjo erilaisia tunteita	8
tylsistyminen	8
helppous	7
tavoitteellisuus	7
tuskastuneisuus	7
ylpeys	7
huojennus	6
vihan tunteet	5
muut	5
epäluottamus ja epäluuloisuus	4
huolestuneisuus	4
inho	3

välttely	3
mahdottomuus	2

Eniten mainintoja aineistossa kerännyt tunne oli todistamisen kokeminen *haasteeksi*. Tähän alaluokkaan luokiteltiin seuraavan tyyppisiä ilmauksia, joissa yleensä käytettiin sanaa haaste: *"halua tarttua haasteeseen"*, *"Aluksi hankalasti kuvailtava tunne liittyen tulevaan haasteeseen."* Epävarmuuden tunteita ilmaistessa käytettiin niin ikään sanaa epävarma; *"Yleensä koen epävarmuuden tunteita."* Tunteiden löytäminen aineistosta ja luokittelu oli siis hyvin suoraviivaista, ja taulukon 6 kuvaamien alaluokkien nimeäminen tapahtui edellisessä luvussa kuvatulla tavalla opiskelijoiden ilmaisemien tunnesanojen perusteella. On huomattava, että yhden opiskelijan vastaus saattoi kuulua useampaan eri alaluokkaan, kunkin opiskelijan raportoimien tunteiden mukaisesti.

Seuraavaksi esitellään taulukon 6 alaluokista vielä muutamia, joiden nimeäminen ei ollut näin suoraviivaista ja joissa alaluokan nimi vaatii lukijalle ehkä hieman selitystä. Alaluokkaan *neutraali* liitettiin vastaukset, joissa kerrottiin, ettei todistamiseen liity mitään tunteita: *"tää on ihan tunteetonta touhua"* sekä vastaukset, joissa opiskelija kuvasi tunteitaan neutraaleiksi: *"tuntemukset ovat suurimmaksi osaksi neutraaleja"*. Myös vastaukset, joissa opiskelija ei ole osannut nimetä kokemiaan tunteita, luokiteltiin tähän luokkaan: *"EOS"*, *"En varmaan mitään voimakkaita tunteita"*.

Luokkaan *voimakas mielihyvä* liitettiin mielihyvän, nautinnon, tyytyväisyyden ja tyydytyksen tunteet: *"Todistusta hahmotellessa on todella tyydyttävää, kun toteamukset loksahtavat yhteen"*. Olennaista tähän luokkaan kuuluvissa vastauksissa oli, että niissä koettu mielihyvän aste oli selvästi tulkittavissa korkeammaksi kuin luokassa *laimea mielihyvä*: *"Jos tehtävä todistustyyppi on minulle tuttu työhön on mukava tarttua"*. Tähän luokkaan liittyviä tunteita kuvailtiin sanoilla mukava, ok ja kiva.

Voimavarojen riittämättömyys kuvattiin työläytenä, rasittavuutena, stressinä, uupumuksena, kuormittuneisuutena, väsymyksenä ja paineen tunteena: *"todistaminen tuntuu työläältä, jos sitä ei ole harjoitellut riittävästi"*. Alaluokkaan *virtauksen kokemukset* luokiteltiin seuraavat tunneilmaisut: flow, koukuttava, intohimo, halu ratkaista, halu oppia, inspiraatio ja luovuus.

Laaja kirjo erilaisia tunteita puolestaan viittaa vastauksiin, joissa opiskelijat raportoivat kokeneensa sekavia, ristiriitaisia ja vaihtelevia tunteita, tai monenlaisia tunteita. Tähän luokkaan ei kuitenkaan sisällytetty vastauksia, joissa opiskelijat nimesivät monia tunteitaan nimeltä, vaan näissä tapauksissa keskityttiin luokittelemaan nimetyt tunteet omiin luokkiinsa. Alaluokkaan *muut* sisällytettiin opiskelijoiden kuvailemat tunteet, joita ei saatu tulkittua mihinkään muuhun alaluokkaan kuuluvaksi ja joilla oli vain yksittäinen maininta: kunnioitus, tekee mieli mennä googleen, tyhjyyteen heittäytyminen, vyyhtimäinen ja älykkyys. Nämä kaksi viimeiseksi mainittua luokkaa jäivät ulkopuolelle tarkasteltaessa tunteiden jaottelua valenssin ja aktivaation avulla toisen tutkimuskysymyksen kohdalla.

7.1.2 Yleisimmin koetut tunteet

Taulukosta 6 nähdään, että opiskelijoiden yleisimmin kokemat tunteet ovat haaste (81), epävarmuus (70), mielenkiinto (69), turhautuminen (65), neutraalit tuntemukset (64), vaikeuksien ja hankaluuksien kokemukset (50), onnistuminen (38), voimakas mielihyvä (36) sekä ilo (34). Nämä yleisimmin koetut tunteet on vielä koottu omaan taulukkoonsa 7. Kun nämä yleisimmin koetut tunteet jaotellaan luvussa 4.3 esiintyvän affektien kehämallin mukaan positiivisiin ja negatiivisiin aktivoiviin ja ei-aktivoiviin (taulukko 8) huomataan, että suurin osa kuuluu kategoriaan positiiviset aktivoivat tunteet: haaste, mielenkiinto, onnistuminen, voimakas mielihyvä ja ilo. Toiseksi eniten mainintoja on turhautuneisuuden ja epävarmuuden sisältävällä negatiivisilla aktivoivilla tunteilla. Nämä tunteet voidaan nähdä oppimisen kannalta hyödyllisinä. Selvästi vähemmän tunteita yleisimmin koettujen tunteiden joukosta kuuluu oppimisen kannalta haitallisiin, ei-aktivoiviin tunteisiin. Vaikeus ja hankaluus negatiivisena, neutraali positiivisena kuuluvat näihin oppimisen kannalta haitallisiin tunteisiin tässä tutkimuksessa tulkitun perusteella. Muiden tunteiden tarkempi jaottelu affektien kehämallin mukaan kuvataan luvussa 7.2.

Taulukko 7. Yleisimmin koetut tunteet ja niihin liittyvien mainintojen lukumäärät.

tunne	mainintojen lukumäärä
haaste	81
epävarmuus	70
mielenkiinto	69
turhautuminen	65
neutraali	64
vaikeus ja hankaluus	50
onnistuminen	38
voimakas mielihyvä	36
ilo	34

Taulukko 8. Yleisimmin koetut tunteet jaoteltuna affektien nelikenttämallin mukaisesti.

luokka	positiivinen aktivoiva	positiivinen ei-aktivoiva	negatiivinen aktivoiva	negatiivinen ei-aktivoiva
tunne	haaste mielenkiinto onnistuminen voimakas mielihyvä ilo	neutraali	turhautuminen epävarmuus	vaikeus ja hankaluus
mainintoja yht.	258	64	135	50

7.1.3 Todistamisen tilanteet yleisimmin koettujen tunteiden takana

Tässä alaluvussa kuvaillaan, millaisissa tilanteissa todistamiseen liittyen opiskelijat kertoivat kokeneensa edellä kuvattuja yleisimpiä tunteita, miten he näitä tunteita selittivät ja mihin muihin tunteisiin ne liittyivät. Kustakin tunteesta muodostetut analyysin apuna toimineet alaluokat esitellään liitteissä listana. Tässä keskitytään luomaan yksityiskohtainen kuva kustakin yhdeksästä eri yleisimmästä tunteesta.

Haaste

Haasteen tunteeseen liittyi paljon erilaisia positiivisia tunteita, kuten mielenkiinto, intohimo, innostus, mielihyvä ja palkitsevuus. Suurin osa haasteen tunnetta kokeneista opiskelijoista siis mielsi haasteen olevan yhteydessä hyvin positiivisiin tunteisiin: ”*Se on haastavaa, mutta ehkä siksi juuri mielenkiintoista. – ”*, ”*Positiivisia. Pidän haasteista.*” Negatiivisena haasteen kokevia oli selvästi vähemmän; kun haasteesta nauttineita oli 33, kielteisesti haasteeseen suhtautui 8. Neutraalina haastetta piti seitsemän opiskelijaa. Nämä haasteen tunteeseen liittyvät affektit tiivistetään taulukossa 9.

Taulukko 9. Haasteeseen liittyvät affektit.

haasteen tunteeseen liittyvät affektit	vastausten lukumäärä
haasteesta nauttiminen	33
haaste ja palkitsevuus	16
haaste negatiivisena	8
haaste neutraalina	7
haaste ja hyödyllisyys	5

Todistamiseen liittyviä, haasteen tunnetta aiheuttaneita seikkoja olivat todistamisen aloittaminen (9 kpl), todistuksen vaatima työmäärä ja panostus (7 kpl), matemaattinen kirjoittaminen (4 kpl), induktiotodistukset (2 kpl) ja joukkoihin liittyvät todistukset (1kpl). Haasteen tunteeseen liitetty todistamisen tilanteet on koottu taulukkoon 10.

Taulukko 10. Todistamisen haasteet.

haasteen tunteeseen liittyvät todistamisen tilanteet	vastausten lukumäärä
todistamisen aloittaminen	9
todistuksen vaatima työmäärä ja panostus	7
matemaattinen kirjoittaminen	4
induktiotodistukset	2
joukkoihin liittyvät todistukset	1

Epävarmuus

Eniten epävarmuuden tunteita opiskelijoissa aiheutti se, ettei oman todistuksen pätevydestä oltu varmoja: ” --*en ole koskaan aivan täysin varma onko se oikein tai edes todistus*”. Lisäksi se, että todistaminen on melko uusi asia, jota ei ole vielä päästy harjoittelemaan riittävästi, sai opiskelijat epävarmoiksi. Samoin kun haaste, myös epävarmuus oli tyypillinen tunne aloitettaessa todistusta. Epävarmuus saattoi iskeä myös kesken todistuksen. Kahdella epävarmuus liittyi matemaattiseen kirjoittamiseen, ja yksi kertoi epävarmuuden kumpuavan aiemmista kokemuksista toisilta kursseilta. Taulukko 11 listaa vielä epävarmuuden tunteeseen liittyvät todistamisen tilanteet.

Taulukko 11. Syitä todistamiseen liittyvään epävarmuuteen.

epävarmuuden tunteeseen liittyvät todistamisen tilanteet	vastausten lukumäärä
oman todistuksen pätevyys	23
harjoituksen puute	18
todistuksen aloittaminen	11
kesken todistuksen	4
matemaattinen kirjoittaminen	2

Mielenkiinto

Haaste ja mielenkiinto näyttivät liittyvän yhteen: ” --*haasteet saavat innostumaan enemmän ja tehtävä muuttuu mielenkiintoiseksi*--”. Mielenkiinnon tunteeseen liittyi myös paljon positiivisia tunteita kuten motivoituneisuutta, intohimoa ja innostusta. Kuudessa vastauksessa mielenkiintoon liittyi myös negatiivisia tunteita, kuten turhautumista, ahdistusta, hämmennystä ja vaikeutta. Edellä kuvattujen haasteen ja epävarmuuden tapaan mielenkiinnon tunne painottui todistuksen alkupuolelle. Todistuksen aloitus oli ainoa todistamiseen liittyvä tilanne, joka vastauksista ilmeni. Taulukossa 12 esitellään mielenkiinnon tunteeseen liittyvät affektit.

Taulukko 12. Mielenkiinnon tunteeseen liittyvät affektit.

Mielenkiinnon tunteeseen liittyvät affektit	vastausten lukumäärä
mielenkiinto ja haaste	17
mielenkiinto ja miellyttävät tunteet	13
mielenkiinto ja negatiiviset tunteet	6
mielenkiinto ja hyödyllisyys	4

Turhautuminen

Turhautumisen takana olivat usein kokemukset siitä, että oma taitotaso ja tehtävän asettamat vaatimukset eivät kohtaa. Toisin sanoen liian vaikealta tuntuvat tehtävät aiheuttivat turhautuneisuutta: *”Turhautuminen, jos tehtävä on liian vaikea”*. Turhautumista esiintyi myös, mikäli tehtävä ei edennyt ja opiskelija tunsikin olevansa jumissa: *”Turhautuneisuutta jos ei millään keksi, miten jokin todistus etenis”*. Sekä ongelmat alkuun pääsemisessä että todistuksen loppuun saattamisessa turhauttivat. Turhautuminen yhdistyi myös merkityksettömyyden kokemukseen. Opiskelijoiden vastauksista kävi ilmi, että osan oli vaikea ymmärtää, miksi todistetaan jo tosiksi osoitettuja matemaattisia faktoja. Toisaalta myös opiskelijalle liian helpot todistukset saattoivat aiheuttaa merkityksettömyyden kokemuksen. Samaa tunnetta kokevat opiskelijat saattoivat siis erota toisistaan merkittävästi ajatuskulkujen suhteen. Myös ajanpuute ja todistamisen työläys turhauttivat. Yksi kertoi turhautuneensa matemaattisesta kirjoittamisesta saamaansa palautteeseen. Taulukossa 13 kootaan, miten opiskelijat selittivät omaa turhautumistaan.

Taulukko 13. Opiskelijoiden selityksiä kokemalleen turhautumiselle.

Selityksiä turhautumiselle	vastausten lukumäärä
taitotaso ja vaatimukset eivät kohtaa	15
todistus ei etene	10
ei pääse alkuun	7
merkityksettömyys	6
ei saa valmiiksi	5
voimavarat eivät riitä	4
saatu palaute	1

Neutraali

Neutraali määriteltiin tässä tutkimuksessa tunteeksi, sillä se oli melko yleinen vastaus. Määrittelemällä ilmaus tunteeksi oli myös mahdollista tutkia tarkemmin, mitä tämä ”tunne” pitää sisällään. Seuraavaksi kuvaillaan tarkemmin, miten tätä tunnetta selitettiin.

Tyypillisimmin opiskelijat kuvailivat tunteitaan neutraaleiksi (21 kpl) tai vastasivat, etteivät koe tunteita (21 kpl). Myös vastaukset, joissa ei kuvailla omia tunteita, tai osata nimetä niitä, muodostivat oman kategoriansa (13 kpl). Kolme opiskelijaa kertoi todistamisen olevan nykyään niin rutiinia, ettei se siksi aiheuta tunteita. Myös jos opiskelija tiesi osaavansa tehdä todistuksen, ja oli vain kyse suorittamisesta, ei voimakkaita tunteita ymmärrettävästi ilmennyt. Tähän todistamistehtäviä rutiinina kuvailevaan kategoriaan kuului yhteensä viisi vastausta. Kaksi opiskelijaa kuvailivat innostuksen olevan ainoa tunne: ”*Innostusta jos mitään*”, ”*Joskus en mitään, joskus olen innoissani ratkaistavasta ongelmasta*”.

Huomio tämän viidenneksi yleisimmän ”tunteen” kohdalla kiinnittyy kahteen, toisistaan eroavaan luokkaan; *tunteitaan neutraaleiksi luonnehtiviin* ja *tunteensa kieltäviin*. Neutraaliksi tunteitaan luonnehtineet eivät siis kokeneet voimakkaita tai aktivoivia tunteita, mikä ilmenee myös siitä, että he saattavat mainita myös joitakin tunteita nimeltä.

Ennen tehtävän kunnolla lukemista hermostuttaa, osaankohan edes lähteä liikkeelle. Muuten tunteukset ovat suurimmaksi osaksi neutraaleja.

Nämä opiskelijat eroavat heistä, jotka kielsivät kokeneensa minkäänlaisia tunteita.

En tunne mitään.

Taulukossa 14 esitellään vielä neutraali-tunteen alle muodostuneet luokat ja vastausten lukumäärät kussakin luokassa.

Taulukko 14. Opiskelijoiden vastauksista tunteeseen neutraali liitetty luokat.

Selityksiä neutraalille tunteelle	vastausten lukumäärä
tunteitaan neutraaliksi luonnehtivat	21
tunteensa kieltävät	21
eivät tunnista/nimeä tunteitaan	13
todistaminen rutiinina	5
innostus tai ei mitään	2

Vaikeus ja hankaluus

Todistamiseen liittyvät vaikeudet ja hankaluudet ilmenivät opiskelijoiden vastauksen perusteella useimmiten todistustehtävän alkupuolella. Todistamisessa alkuun pääsemisen kertoi kokevansa vaikeaksi 21 opiskelijaa. ”*Välillä aloittaminen on hankalaa--.*” Vastausta ”*Riippuu todistuksesta*” esiintyi vaikeuksien ja hankaluuksien yhteydessä myös jonkin verran (7 kpl); todistukset vaikeisiin aiheisiin liittyen tai monimutkaiset todistukset koettiin vaikeiksi. Tämä luokka eroaa heistä, jotka kokivat tunnetta silloin, kun eivät uskoneet oman osaamisensa riittävän (6 kpl). Edellisessä vaikeuden ja hankaluuden syyksi nähdään itse todistus, kun taas jälkimmäisessä syy vaikeuksiin on omassa itsessä. Neljä ilmoitti kokevansa vaikeuksia todistusmenetelmiin liittyen. Joukkoihin liittyvät todistukset (3 kpl) sekä se, ettei todistusta saatu valmiiksi (3 kpl) liittyivät myös vaikeuksien ja hankaluuksien tunteeseen. Taulukkoihin 15 ja 16 on koottu, mitkä todistamisen tilanteet ja opiskelijoiden selitykset vaikeuksille ja hankaluuksille löytyivät syksyn 2019 Johdatus yliopistomatematiikkaan -kurssilaisten vastauksista.

Taulukko 15. Vaikeuden ja hankaluuden tunteeseen liittyvät todistamisen tilanteet.

todistamisen tilanne	vastausten lukumäärä
todistamisessa alkuun pääseminen	21
vaikeat todistukset	7
todistusmenetelmät	4
todistusta ei saa valmiiksi	3
joukkoihin liittyvät todistukset	3

Taulukko 16. Selitys vaikeuden ja hankaluuden tunteelle.

opiskelijan selitys	vastausten lukumäärä
osaaminen ei riitä	6

Onnistuminen

Onnistumisen tunne liittyi todistuksen valmistumiseen: *"Todistuksen saaminen päätökseen on valtava onnistumisen kokemus"*. Onnistumisen tunne saattoi tulla myös pienemmistä palasista todistuksen edetessä: *"Ennen kaikkea todistusta tehdessä koen onnistumisen tunteita"*. Onnistumisen tunne oli tyypillinen myös haasteiden jälkeen: *"Tunnen haastetta ja siitä seuraavaa onnistumisen elämystä"*. Onnistuminen liittyi myös oivalluksen tunteeseen: *"--kun ratkaisen ja ymmärrän asian saan suuren onnistumisen tunteen"*. Taulukossa 17 esitellään onnistumisen tunteeseen liittyvät todistamisen tilanteet ja taulukossa 18 onnistumisen tunteeseen liittyvät muut tunteet sekä vastausten lukumäärät.

Taulukko 17. Onnistumisen tunteeseen liittyvät todistamisen tilanteet.

todistamisen tilanne	vastausten lukumäärä
todistuksen valmiiksi saaminen	21
todistusta tehdessä	5

Taulukko 18. Onnistumisen tunteeseen liittyvät affektit.

onnistumisen tunteeseen liittyvät affektit	vastausten lukumäärä
onnistumisen tunne haasteiden jälkeen	5
onnistuminen ja oivallukset	4

Voimakas mielihyvä

Onnistumisen tunteen tavoin myös voimakasta mielihyvää koettiin valmiista todistuksesta. Mielihyvää tuotti myös todistustehtävien pohtiminen ja oivallukset. Mielihyvän tunteeseen liittyi opiskelijoiden vastausten mukaan onnistumisen kokemus.

--tyydytystä, kun saan matemaattisesti kauniin todistuksen valmiiksi --

Nautin ongelman analysoinnista ja ratkaisun miettimisestä--

--Ja jos todistuksen palaset lokahtavat paikoilleen, koen suurta tyytyväisyyttä.

Usein innostun asiasta ja saan tyydytystä, kun onnistun.

Taulukossa 19 kootaan yhteen voimakkaaseen mielihyvään liittyvät todistamisen tilanteet ja affektit.

Taulukko 19. Voimakkaaseen mielihyvään liittyvät todistamisen tilanteet ja affektit.

tilanne tai affekti	vastausten lukumäärä
valmis todistus	14
pohtiminen ja oivallukset	9
onnistuminen	5

Ilo

Onnistumisen ilo oli tyypillinen tunne todistuksen loppupuolella. Tässä tutkimuksessa kuhunkin yleisimmistä tunteista perehdyttiin tunne kerrallaan, minkä vuoksi samat teemat näyttävät toistuvan eri tunteiden yhteydessä. Tutkimuksen järjestelmällinen ja systemaattinen eteneminen kuitenkin edellytti tällaista menettelyä, sillä laadullisten tutkimusten yleisenä ongelmana on juuri analyysin löyhyys. Onnistumisen lisäksi iloa tuotti opiskelijan havaitsema oma osaaminen, todistustehtävän loogisuus ja matemaattinen kirjoittaminen, sekä koetut oivallukset. Seuraavaksi esitellään lyhyet lainaukset opiskelijoiden vastauksista onnistumisen iloon sekä loogisuuteen ja matemaattiseen kirjoittamiseen liittyen. Taulukossa 20 kootaan opiskelijoiden vastauksista tulkitut selitykset ilolle.

Jos todistus onnistuu, olen erittäin iloinen--

Onnistuminen tuottaa iloa--

Iloa kun saan jäsenneltyä todistuksen loogisesti hyvin.--

Voiton ja ilon tunteita, kun onnistun kirjoittamaan induktiotodistuksen—

Taulukko 20. Ilon tunteeseen liittyvät, opiskelijoiden vastauksista tulkitut selitykset.

iloon liittyvät affektit ja todistamisen tilanteet	vastausten lukumäärä
onnistumisen ilo	12
osaamisen tuottama ilo	3
loogisuus ja matemaattinen kirjoittaminen	3
ilo oivalluksista	2

Yhteenveto

Todistustehtävän tai todistamisen aloitusvaiheessa painottuivat yleisimmistä tunteista vaikeus ja hankaluus, haaste, epävarmuus, mielenkiinto ja turhautuminen.

Vaikeaksi koetaan juuri todistamisen aloittaminen, ja turhautuminen on tyypillistä, ellei tehtävässä päästä alkuun.

Kun todistaminen on lähtenyt vauhtiin, näyttää todistustehtävän tekemiseen tässä tutkimuksessa liittyvän negatiivisista tunteista turhautumista, epävarmuutta sekä vaikeuksia ja hankaluuksia. Epävarmuutta aiheuttaa se, että todistaminen on uusi asia, johon ei ole vielä harjaannuttu. Turhautuneisuus taas liittyy siihen, että omien taitojen ei koeta riittävän todistuksen tekemiseen, tai tehtävän tekeminen jumittaa. Tekemisen vaiheessa eniten korostuu kuitenkin todistamisen kokeminen positiivisena haasteena, josta nautitaan, ja joka herättää mielenkiinnon tunteita. Tämä on huomionarvoinen tulos, sillä haaste saatettaisiin myös mieltää negatiiviseksi tunteeksi. Näin ei kuitenkaan tämän tutkimuksen mukaan ole, vaan syksyn 2019 Johdatus yliopistomatematiikkaan -kurssilaiset näkevät haasteen voimakkaana, positiivisena ja vahvasti tehtävään virittävänä tunteena. Tehtävän tekeminen tuottaa myös jonkin verran haastetta positiivisempia tunteita, kuten voimakasta mielihyvää sekä onnistumisen ja ilon tunteita.

Todistuksen loppuvaiheessa koetaan pääsääntöisesti positiivisia tunteita; mielihyvää, onnistumisen iloa, sekä palkitsevuuden tunteita, jotka ovat erityisen voimakkaita, mikäli todistus on koettu vaikeaksi ja haastavaksi. Epävarmuus painottuu myös todistustehtävän lopussa, mikäli oman todistuksen pätevyydestä ei olla vakuuttuneita. Mikäli todistusta ei olla saatu valmiiksi, koetaan turhautumista sekä vaikeutta ja hankaluutta.

Kurssin sisällöllisistä asioista tässä tutkimuksessa tulivat esiin matemaattinen kirjoittaminen, joukkoihin liittyvät todistukset sekä induktiotodistukset. Matemaattiseen kirjoittamiseen liittyi haasteen tunnetta sekä epävarmuutta, mutta myös iloa. Joukkojen todistukset koettiin vaikeina, hankalina ja haastavina. Induktiotodistukset koettiin myös haastavina. Ylipäätään todistusmenetelmiin liittyen koettiin vaikeuden ja hankaluuden tunnetta. Nämä tulokset ovat kuitenkin heikot, sillä mainintoja näistä kurssin sisältöön liittyvistä asioista ei ollut kovinkaan paljon. Laadullisen tutkimuksen perinteessä kuitenkin nähdään myös yksittäiset tapaukset mielenkiintoisina, joten sen vuoksi myös tässä tutkimuksessa nostetaan nämä huomiot esille tuloksina, joista voi nousta uusia tutkimusaiheita.

Tässä tutkimuksessa analyysiin sisällytettiin vastaukset, joissa omia tunteita ei raportoitu, tai ne kiellettiin kokonaan. Tämä ”neutraali” luokka olikin hämmästyttävän suuri, sillä se sisältyi yleisimpien tunteiden joukkoon.

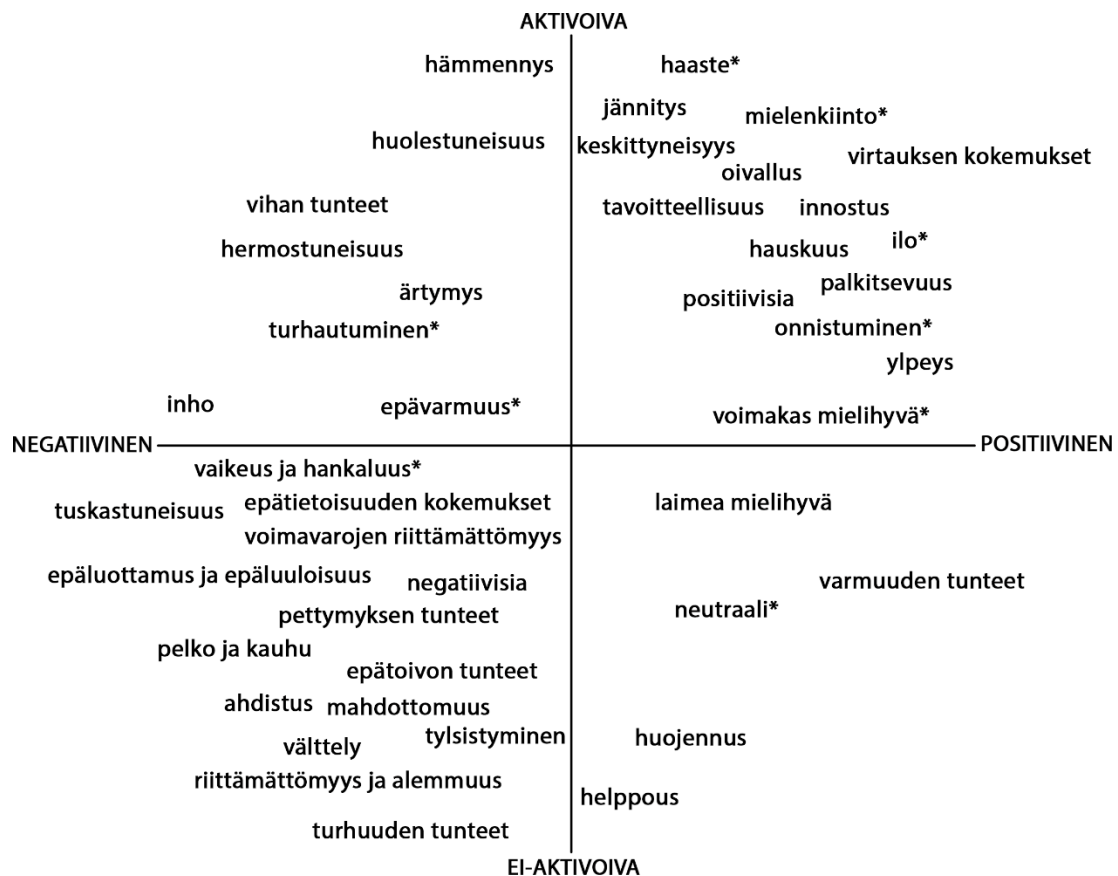
7.2 JYM-kurssilaisten todistamisen oppimiseen liittyvien tunteiden eräs jäsenitys – valenssi ja aktivaatio

Tässä alaluvussa esitetään tulokset toiseen tutkimuskysymykseen, jonka tavoitteena oli selvittää, millaisen kuvan opiskelijoiden kokemista todistamiseen liittyvistä tunteista niiden jaottelu valenssin ja aktivaation keinoin antaa Johdatus yliopistomatematiikkaan -kurssilla. Feldman Barrettin ja Russellin (1998) malli, joka on otettu tähän tutkimukseen keskeisenä teoriaa ohjaavana analyysinä, on eräs valenssin ja aktivaation ulottuvuuksia hyödyntävä teoria. Tässä tutkimuksessa paljastui, että Johdatus yliopistomatematiikkaan -kurssilaiset kokivat monenlaisia tunteita todistamiseen liittyen. Malli osoittautuikin tämän tutkimuksen tarkoituksiin sopivan yksinkertaiselta tavalta jäsentää suuri määrä kurssilaisten raportoimia erilaisia tunnekokemuksia. Toiseksi tässä alaluvussa keskitytään siihen, mitä selviytymiskeinoja negatiivisia tunteita kokeneet opiskelijat käyttivät.

7.2.1 Valenssi-aktivaatio-jaottelulla opiskelijoiden kokemista tunteista tulkittua

Luvussa 7.1.1 esitelty kurssilaisten kokemat tunteet jaoteltiin todistamisen oppimisen kannalta hyödyllisiin ja haitallisiin, eli aktivoiviin ja ei-aktivoiviin tunteisiin. Molemmat näistä jakautuvat vielä analyysia ohjanneen Feldman Barrettin ja Russellin mallin mukaan positiivisiin ja negatiivisiin, siis miellyttäviin ja epämiellyttäviin tunteisiin. Kuvassa 16 esitellään kurssilaisten kokemien tunteiden jaottelu näihin luokkiin tutkijan tulkinnan mukaan. Luvussa 6 kuvatun mukaisesti jaottelu on tehty syvällisen aineistoon perehtymisen, tutkijan harkinnan ja affektien nelikenttämallin avulla. Vaikka aineistoon on perehdytty huolella, on tässä esitetty jaottelu suuntaa antava muiden kuin yleisimmin koettujen tunteiden kannalta, jotka on merkitty kuvaan erotukseksi muista punaisella tekstillä. On myös muistettava tunnekokemusten yksilöllinen luonne, mikä tekee mahdottomaksi tunteiden absoluuttisen ja tarkan jäsentelyn tässä tutkimuksessa käytetyn aineiston perusteella. Tutkija on kuitenkin tehnyt parhaansa jäsennessään Johdatus yliopistomatematiikkaan -kurssilaisten kokemia tunteita nelikenttään. Lisäksi on huomioitava, että kaksi tunteiden muodostamaa luokkaa jäi tästä pois; luvussa

7.1.1 esiteltyt *laaja kirjo erilaisia tunteita* ja *muut* sillä niitä ei ollut mahdollista tulkita tämän nelikentän jaottelulla.

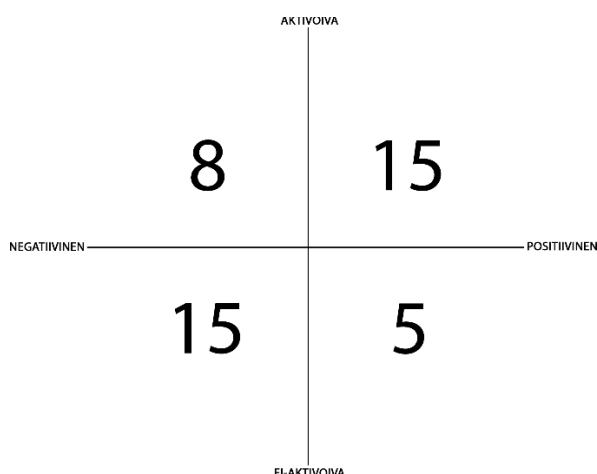


Kuva 16. Opiskelijoiden kokemat tunteet nelikentässä. Merkityt tunteet analysoitu tarkimmin.

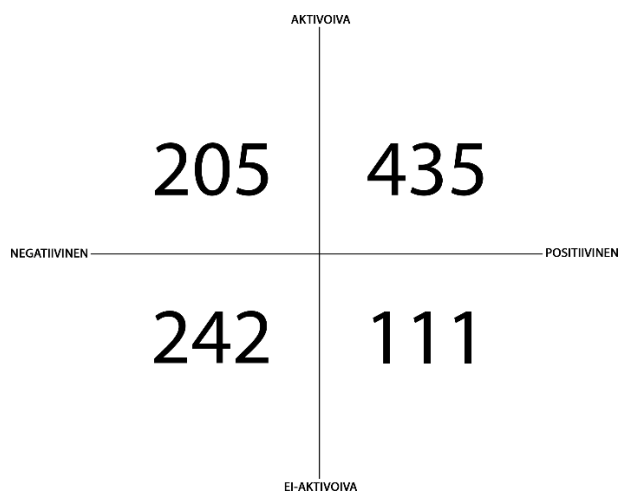
Kuvassa 17 on laskettu nelikentän kunkin lohkon sisältämät, tutkijan tähän luokkaan kuuluvaksi tulkitsemat, eri tunteiden lukumäärät yhteen. Kuvasta nähdään, että eniten erilaisia tunteita, ja yhtä paljon kumpaankin, kuului luokkiin positiiviset aktivoivat tunteet (15 kpl) negatiiviset ei-aktivoivat tunteet (15 kpl). Negatiivisiin aktivoiviin tunteisiin kuului yhteensä 8, ja positiivisiin ei-aktivoiviin 5 erilaista tunteita. Näin tarkasteltuna oppimisen kannalta hyödyllisiksi tunteiksi voidaan lukea 23 Johdatus yliopistomatematiikkaan -kurssilaisten kokemista 43:ta tunteesta. Loput 20, eli vain hieman alle puolet, voidaan nähdä todistamisen oppimisen kannalta haitallisina. Tulee kuitenkin huomata, että tunteiden jakautuminen näihin luokkiin on tutkijan aineiston ja teorian pohjalta tekemää tulkintaa, ja on mahdollista, että joku toinen saattaisi nähdä jaottelun hieman eri tavalla.

Kun asiaa tarkastellaan laskemalla yhteen kunkin lohkon yksittäisten tunteiden saamat mainintojen lukumäärät, saadaan kuvan 18 esittämät luvut nelikentittäin.

Selvästi eniten mainintoja (435 kpl) opiskelijoiden raportoimissa tunteissa on luokassa positiiviset ja aktivoivat tunteet. Tämä voidaan nähdä erittäin positiivisena asiana, ja se tuntuu myös uskottavalta; yliopistoon matematiikkaa opiskelemaan päätyvät opiskelijat todennäköisesti nauttivat matematiikasta, ja ovat myös motivoituneita oppimaan. Toiseksi yleisempiä, negatiivisia ei-aktivoivia tunteita oli vain hieman yli puolet (242 kpl) positiivisten aktivoivien saamasta mainintojen lukumäärästä. Kolmantena ovat negatiiviset aktivoivat tunteet 205:llä maininnalla ja vähiten koettiin positiivisia ei-aktivoivia tunteita (111 kpl). Yllättävää on, että toiseksi suurimman luokan muodostivat negatiiviset ei-aktivoivat tunteet. Toisaalta se oli suunnilleen saman kokoinen negatiivisten aktivoivien luokan kanssa. Lopuksi on huomattava, että tässä tutkimuksessa ei ollut mahdollista perehtyä jokaiseen luvussa 7.1.1 kuvattuun tunteiden muodostamaan alaluokkaan yhtä perusteellisesti kuin yleisimpiin tunteisiin, joten luokittelu nelikenttään voi sisältää epätarkkuuksia tältä osin. Voi myös olla, että ”tunteiksi” mielletään erityisesti molemmilla ulottuvuuksilla ”samoja arvoja saavat”, eli juuri positiiviset ja aktivoivat sekä negatiiviset ei-aktivoivat, jolloin nämä korostuvat vastauksissa. Eli esimerkiksi tunnetta ”rentoutunut” ei mielletä arkiajattelussa samalla tavalla tunteeksi kuin vaikkapa tunteita ”jännittynyt” tai ”epätoivoinen”. Tätä tukee se, että näihin kahteen luokkaan myös nimettiin eniten erilaisia tunteita kuvan 17 esittämällä tavalla. Tämä voi liittyä myös mittausajankohtaan; kun loppukurssista kyselyyn vastatessa muistellaan todistaessa koettuja tunteita, tulee mieleen helpoimmin ehkä erityisen positiiviset ja erityisen negatiiviset tunteet.



Kuva 17. Tunteiden lukumäärä nelikentissä.



Kuva 18. Nelikenttien tunteiden saamien mainintojen yhteenlaskettu lukumäärä.

Kun lasketaan kuvan 18 osoittamia nelikentän eri lohkoja kuvaavat luvut yhteen, saadaan kuvien 19 ja 20 esittämät tulokset. Tässä tutkimuksessa käytetyn käsitteellistämisen mukaan todistamisen oppimisen kannalta hyödyllisiä tunteita, eli aktivoivia positiivisia ja negatiivisia tunteita oli lähes puolet (640 kpl) enemmän kuin haitallisia eli ei-aktivoivia tunteita (353 kpl). Tämä antaa valoisaa kuvaa todistamiseen liittyvistä tunteista Johdatus yliopistomatematiikkaan -kurssilla, ja kertoo siitä, että kurssi on nykyisellään sekä huolellisesti ja taitavasti suunniteltu, että onnistuneesti toteutettu. Kuvassa 20 on laskettu yhteen positiiviset ja negatiiviset tunteet, ja tässä ei nähdä yhtä merkittävää eroa kuin pelkistetyssä jaottelussa hyödyllisiin ja haitallisiin. Negatiiviset tunteet saivat noin sata mainintaa vähemmän (447 kpl) kuin positiiviset tunteet (546 kpl). Tähänkin suhteutettuna edellinen huomio (tässä tutkimuksessa käytettyyn jaotteluun liittyen) oppimisen kannalta hyödyllisten tunteiden enemmistöstä on positiivinen; vaikka kurssin opiskelijoiden negatiivisten tunteiden esiintymistä ja kokemista ei voida estää tai poistaa, voidaan silti pyrkiä vaikuttamaan siihen, ovatko nämä negatiiviset tunteet hyödyllisiä vai haitallisia, siis opiskelijoita aktivoivia vai passivoivia.

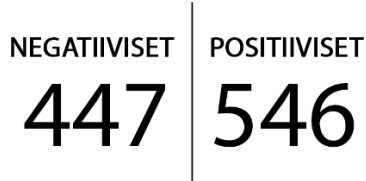
HYÖDYLLISET

640

353

HAITALLISET

Kuva 19. Hyödyllisten ja haitallisten tunteiden saamien mainintojen yhteenlaskettu lukumäärä.



Kuva 20. Positiivisten ja negatiivisten tunteiden saamien mainintojen yhteenlaskettu lukumäärä.

7.2.2 Opiskelijoiden selviytymiskeinoja todistamiseen liittyviin negatiivisiin tunteisiin

Kun opiskelijoilta kysyttiin heidän kokemiaan tunteita matemaattiseen todistamiseen liittyen, osa kirjoitti vastauksissaan kokemistaan negatiivisista tunteista todistamista kohtaan. Osa opiskelijoista vastasi hyvin yksityiskohtaisesti, miten he toimivat kohdatessaan näitä vaikeita tunteita. Aineisto antoi siten mahdollisuuden tarkastella, millaisia selviytymiskeinoja Johdatus yliopistomatematiikkaan -kursilaiset käyttivät harjoitellessaan vaikealta tuntuvia todistuksia, jotka usein aiheuttavat näitä negatiivisia tunteita. Selviytymiskeinojen tarkastelu on tärkeää, sillä monipuolinen selviytymiskeinojen hyödyntäminen vähentää haitallisten tunteiden vaikutusta, edistää oppimisen kannalta hyödyllisiä tunteita ja vaikuttaa opiskelijan suoriutumiseen. Opetushenkilöstön on mahdollisesti helpompi tukea ja ohjata opiskelijoita erilaisten selviytymiskeinojen käyttöön, kun on käsitys siitä, millaisia keinoja johdantokurssin opiskelijat tyypillisesti käyttävät.

Opiskelijoiden vastauksista luotiin kymmenen erilaista, selviytymiskeinoa kuvaavaa luokkaa. Nämä luokat ovat seuraavat:

- Mitä vaikeampi sitä palkitsevampi (16)
- Todistustehtävään perehtyminen ja sen pohtiminen (13)
- Luottamus siihen, että harjoitus tekee mestarin (9)
- Tekemään ryhtyminen (8)
- Avun pyytäminen (8)
- Todistamisen arvostus (6)
- Sisäinen kannustus (3)
- Oman työn ja ajankäytön suunnittelu (3)
- Välttely (2)
- Tauon pitäminen (1)

Luokan perässä oleva numero kuvaa sitä, kuinka monessa eri vastauksessa kyseinen teema toistui. Nämä lukumäärät ovat vähäiset esimerkiksi ensimmäiseen tutkimuskysymykseen verrattuna, sillä opiskelijoilta ei suoraan kysytty näistä selviytymiskeinoista. Tähän tutkimuskysymykseen esitetyt tulokset ovat siten heikot. Tutkija kuitenkin koki niihin perehtymisen mielenkiintoiseksi, sillä laadullisessa tutkimuksessa myös yksittäiset ajatukset saatetaan monesti nähdä kiehtovina. Suurin luokka *mitä vaikeampi sitä palkitsevampi* kuvaa ajatusta, jossa opiskelija näkee vaikean todistustehtävän ratkaisun valmiiksi saamisen hyvittävän tai korvaavan matkan varrella koetut negatiiviset olotilat. Tämä ajatus vaikuttaa olevan kuin suora käytännön sovellus todistustehtävien kontekstiin sananlaskusta *per aspera ad astra*, vaikeuksien kautta voittoon. Alla on kaksi lyhyttä katkelmaa tätä selviytymiskeinoa kuvaavista opiskelijoiden vastauksista:

Vaikeiden tehtävien ratkeaminen tuottaa paljon enemmän mielihyvää kuin tehtävät, jotka ratkeavat heti.

Toisaalta tiukkojen aikarajojen alaisuudessa todistustehtävät, jotka eivät meinaa aueta ovat luultavasti itselleni kaikista stressaavimpia tehtäviä. Kuitenkin näiden ratketessa onnistumisentunne on ylivoimaisesti suurin.

Toiseksi yleisin selviytymiskeinoja kuvaava luokka nimettiin *todistustehtävään perehtyminen ja sen pohtiminen*, ja tämän luokan vastauksissa korostui tiedonhaku kurssimateriaaleista tai kurssin ulkopuolisista materiaaleista, todistuksen pohtiminen ja miettiminen, ja yleinen vaivannäkö ja yrittäminen. Ilmaukset kuin *"etsin mielelläni lisää tietoa"* tai *"jään helposti miettimään todistusta lisää"* olivat tyypillisiä tässä luokassa. Kognitiivinen sitoutuminen käsillä olevaan tehtävään näkyi vastauksista selvästi.

Luokassa *luottamus siihen, että harjoitus tekee mestarin* opiskelijat kuvasivat näkemystä siitä, että huolimatta omasta keskeneräisyydestään todistamisen suhteen he suhtautuivat tulevaisuuteen toiveikkaasti. Opiskelijat myös ponnekkaasti ilmaisivat aikomuksensa perehtyä ja harjoitella todistamista lisää jatkossa.

Epävarmuutta, mutta jos minulle on selvää mitä tehtävässä pitäisi osoittaa niin se on hauskaa. Ongelma on se, että en ole saanut riittävästi harjoitusta todistustehtävien kanssa.

-- Odotan todistamisen olevan hyvin haastavaa, mutta luotan että mikäli yritän todella ja olen peloton haastavankin tilanteen edessä pystyn ymmärtämään, purkamaan osiin ja ratkaisemaan sen.

Tekemään ryhtyminen -luokassa kuvattiin negatiivisten tunteiden vähitellen väistyvän, kunhan todistustehtävän vain aloittaa: ” *kun aloitan todistamisen, ei enää ärsytä*”.

Luokkaan *avun pyytäminen* sisällytettiin vastaukset, joissa selviytymiskeinona käytettiin muilta opiskelijoilta saatavaa apua ja tukea.

Epävarmuutta, hermostuneisuutta. Kuitenkin kun en pelkää ottaa vastaan haasteita, pääsen monesti hyvin alkuun. Kun uskallan aloittaa niin tie aukeaa monesti ainakin hieman. Jos en osaa ja tie nousee pystyyn, kysyn apua.

-- *Kun jään jumiin, se on usein turhauttavaa, mutta onneksi aiheelliset resurssit ovat niin helposti saatavilla, että apua löytyy aina.*

Todistamisen arvostus selviytymiskeinona kuvaa opiskelijoiden näkemystä, jossa he näkevät todistamisen opetteluun tavoiteltavana ja hyödyllisenä. Vaikka todistamisen opettelu aiheuttaa negatiivisia tunteita, opiskelija on valmis kohtaamaan nämä tunteet, sillä haluaa oppia.

En ole hyvä todistamisessa, mutta ymmärrän että se on erittäin tärkeää ja haluan oppia. Eli lievästi epämieluisuutta mutta aitoa kiinnostusta.

--*Hienosti tehdyt todistukset ovat kauniita ja elegantteja ja hyvän todistuksen itse tekeminen on tavoittelun arvoista.*

Sisäinen kannustus -luokan muodostavat kolme eri vastausta sisälsivät viitteitä sisäisen puheen omaisesta kannustuksesta, jossa opiskelija vaikeita tunteita kohdatessaan ikään kuin lohduttaa itseään, tai muistuttaa vaadittavista ominaisuuksista.

--*Toki jossain kohtaa jos ei meinaa keksiä, miten todistusta pitäisi lähestyä, saattaa alkaa turhauttaa. Tähän minulla kuitenkin auttaa se, että muistan, että käsillä oleva ongelma ei ole mahdoton ratkaista ja lopulta siihenkin löytyy ratkaisu.*

Oman työn ja ajankäytön suunnittelua käytettiin selviytymiskeinona, mikäli negatiivisia tunteita koettiin aiheuttavan kurssin tehtäviin liittyvän aikapaineen. Todistamisen vaatiman loogisuuden ja ajattelutyön nähtiin myös edellyttävän rauhallista ja huolellista työskentelyä tehtävän edetessä.

Jos ei ole muita kiireitä ja pääsen rauhassa ratkaisemaan todistustehtävää, lähestyn sitä ensin analysoiden tehtävän, sitten järjestän ajatukseni ja vasta tämän jälkeen ryhdyn suorittamaan itse tehtävää.

Selviytymiskeinoja etsittäessä kahdesta vastauksesta paljastui todistamisen oppimisen kannalta haitallinen strategia negatiivisia tunteita kohdatessa, nimittäin

välttely. Tämän tutkimuksen perusteella ei siis näyttänyt siltä, että välttely olisi yleinen ongelma, mikä voisi hyvin olla mahdollista, kun kyseessä on kaikille pakollinen perusopintojen alkupään kurssi. Täytyy kuitenkin muistaa, että opiskelijoilta kysyttiin heidän kokemiaan tunteita matemaattisia todistuksia tehdessä, ja tässä tutkimuskysymyksessä esiteltyjä selviytymiskeinoja siis analysoitiin vain niiden opiskelijoiden vastauksista, jotka olivat niistä jotain kirjoittaneet.

--Jos tehtävä on sellainen, että alku on minulle vaikeaa niin minua alkaa hermostuttaa se asia ja saatan sivuuttaa sen tehtävän.

Vain yhdessä vastauksessa opiskelija kertoi välttävänsä negatiivisten tunteiden kokemista *pitämällä tauon* tehtävästä tai asiasta, joka ei tunnu etenevän:

--Ajattelin että tuntisin turhaumista, mutta käytännössä niin ei ole juurikaan tapahtunut vaan jos en ole ymmärtänyt heti jotain olen esimerkiksi tehnyt jotain muuta jonkin aikaa.

Tämä hyödyllinen keino voi olla haastava opeteltava esimerkiksi suoraan lukiosta opintonsa aloittaville, sillä lukiossa on vielä aikataulutetut välitunnit ja ruokautunnit. Sitä onkin varmasti hyödyllistä korostaa esimerkiksi uusien opiskelijoiden orientaatiotilaisuuksissa.

7.3 Todistamiseen liittyvien asenteiden muutoksista Johdatus yliopistomatematiikkaan -kurssilla

Tässä alaluvussa esitellään tulokset viimeiseen tutkimuskysymykseen, jonka tarkoituksena oli kartoittaa mahdollista muutosta opiskelijoiden todistamiseen liittyvissä asenteissa. Koska opiskelijoilta ei suoraan kysytty todistamiseen liittyvän suhtautumistavan mahdollisesta muutoksesta, perustuvat seuraavat tulokset vain niihin vastauksiin, jotka olivat jostain syystä tulleet pohtineeksi asiaa vastauksissaan.

Yhteensä kuudessatoista (16) opiskelijan avovastauksessa oli nähtävissä viitteitä siitä, että asenteet todistamista kohtaan ovat muuttuneet kurssin kuluessa. Taulukosta 21 näkee, miten muutosta kuvaavat vastaukset ovat lukumäärällisesti jakautuneet seuraavaksi kuvailtaviin luokkiin. Asteiden muutosta kuvaavat vastaukset jaoteltiin kolmeen kategoriaan; *positiivisiin*, *lieventyneisiin* ja *negatiivisiin*.

Taulukko 21. Todistamiseen liittyvien asenteiden muutosta kuvaavien vastausten jakautuminen syksyn 2019 Johdatus yliopistomatematiikkaan -kurssilla.

muutos	kutakin muutosta kuvanneiden vastausten lukumäärä (yht. 16)
lieventyneet	9
positiiviset	5
negatiiviset	2

7.3.1 Positiiviset

Viidessä vastauksessa suhtautuminen todistamiseen oli muuttunut selvästi positiivisemmaksi. Näissä vastauksissa näkyy paljon positiivisia aktivoivia tunnesanoja. Toisaalta vastauksissa kuvataan myös, millaisia tunteita todistaminen herätti kurssin alussa. Tämän kategorian vastauksissa kuitenkin korostuu positiivinen asenne todistamiseen, positiiviset koetut tunteet, ja selvä muutos negatiivisesta positiiviseen.

Todistus on kivaa, ja varsinkin tämän kurssin aikana asioita oppiessa olen oikeasti tajunnut, mistä koko jutussa on kyse.

Kurssin alussa se oli vaikeaa eikä niitä huvittanut tehdä, mutta nyt niiden tekeminen on mielekästä, sillä niissä pääsee ajattelemaan enemmän kuin normaaleissa yhtälönratkaisutehtävissä ja niihin liittyvät tekniikat ovat paljon paremmin hallussa nyt.

Alkuun todistaminen oli aika kammottava ideana, mutta se on helpottunut paljon syksyn aikana. Tykkään todistusten kirjoittamisesta ja niiden kasaan kokoaminen on usein hauskaa kun saa kokeilla vähän eri ideoita ja rakennella siltä alkuoletusten ja maalin välille. Vaikka todistuksia on hauska opiskella, ovat ne myös yksi haastavimmista jutuista. Joskus on hankala arvioida kuinka perusteellisesti pitää pureutua yksityiskohtiin.

7.3.2 Lieventyneet

Kurssin aikaisia muutoksia kuvaavissa vastauksissa yhdeksässä on tulkittavissa negatiivisten tunteiden ja asenteiden lieventymistä. Aluksi todistustehtävät olivat herättäneet negatiivisia ei-aktivoivia ja aktivoivia tunteita kuten hermostuneisuutta, epävarmuutta ja jopa pelkoa. Kurssin kuluessa nämä tunteet vaikuttivat vähentyneen, mutta vastauksissa ei edellisen kategorian tapaan korostu positiivisten tunteiden läsnäolo.

Todistamistehtävät tekivät, minut aiemmin hermostuneeksi ja epävarmaksi, mutta kurssin myötä kyseiset tunteet ovat lieventyneet.

Näin loppu kurssista ihan ok, jos tehtävä on kurssimonisteessa olevien tehtävien kaltainen. Pystyn soveltamaan hieman asioita, mutta mikäli tehtävä on aivan uusi, joudun pohtimaan tehtävää paljon.

Alussa todistustehtävät pelottivat, mutta nykyään ne eivät herätä sen suurempia tunteita. Koen, että ne ovat vain tavallisia tehtäviä muiden joukossa.

Kurssin jälkeen todistaminen on helpottunut absoluuttisesti, joten aivan valtavia tuntemuksia ei enää tule. Kurssin alussa jokainen uusi tehtävä herätti epätoivoa.

Kahdessa tämän kategorian vastauksessa on kuitenkin nähtävissä myös tässä tutkimuksessa oppimisen kannalta hyödyllisiksi käsitteellistettyjä tunteita; hämmennystä ja tyydytystä. Myös näkemykset omasta pystyvyydestä todistamisen oppimisen ja osaamisen suhteen ovat toiveikkaat.

Lukion jälkeen yritin itsekseni opiskella matematiikkaa ja törmäsin heti todistamiseen. Niin lujaa, että into matematiikkaan hiipui oman osaamisen puutteeseen. Ennen kurssia lähes kammosin todistamista. Nyt en vieläkään koe olevani siinä hyvä, mutta tunnen tyydytystä, kun opin käyttämään uuden todistustekniikan. Haluan tulla paremmaksi ja uskon tulevanikin, joskin uskon joutuvani tekemään keskivertoa enemmän töitä sen eteen. Etenkin tutustuminen induktiotodistukseen oli elämys.

Tiedän osaavani tehdä todistustehtäviä, mutta itsevarmuutta puuttuu vielä. Luulen kuitenkin saavani varmuutta, kunhan jaksan tehdä lisää tehtäviä liittyen todistamiseen. Tässä kohtaa on vielä hieman hämmennyntä olo, mutta tehtävät eivät vaikuta enää samalla tapaa pelottavilta, kuin kurssin alussa.

Kahdessa vastauksessa korostuu todistustehtävän aloittamisen käyneen kurssin aikana helpommaksi. Haaste uskalletaan ottaa vastaan ja tehtävä aloittaa, vaikkei todistusta osattaisi kirjoittaa loppuun asti.

Ennen kurssia ja kurssin ensimmäisissä todistustehtävissä kesti aika kauan saada rattaat rullaamaan, mutta kyllä niihin nyt loppukurssista suhtautui kuin mihin tahansa muuhunkin tehtävään. Oikeastaan joskus niiden aloittaminen oli jopa helpompaa. Loppuun vieminen ei välttämättä niinkään.

Tuntuu, ettei aina oikein tiedä mistä lähteä (tämä on kuitenkin kehittynyt kurssin aikana). Jos tietää, miten lähteä liikkeelle, tulee taas usein fiilis: "mitäs nyt?". Eli tavat joilla päästä haluttuun lopputulokseen vaativat usein paljon ponnisteluja/apuja.

Yhdessä vastauksessa puhutaan haastaviin todistustehtäviin liittyvästä henkisesti lukosta, joka on lähtenyt avautumaan kurssin kuluessa. Tämä haastaviin tehtäviin liittyvä epävarmuus ei ole estänyt opiskelijaa todistusten laatimisessa, vaan hän vaikuttaa turhaan epäilevän omia kykyjään.

Tuntemukset riippuvat todistuksesta. Helpommat todistukset alkavat jo sujua ongelmitta, mutta vähänkään haastavamman todistuksen kanssa minut valtaa heti epävarmuus. Tämän olen tosin huomannut henkiseksi. Epävarmuudesta huolimatta saattaa todistus ”mennä maaliin” kiltisti ja huomaa epäilysten olevan turhia. Tämä henkinen lukko on tosin lähtenyt aukeamaan kurssin aikana ja uskon, että aikanaan pääsen siitä eroon.

7.3.3 Negatiiviset

Kurssin aikaisia muutoksia kuvaavista vastauksista kaksi antavat kovin lohduttoman kuvauksen todistamisen oppimisesta Johdatus yliopistomatematiikkaan -kurssilta. Kurssi on luvussa 2.2 kerrotun mukaisesti suunniteltu madaltamaan kynnystä lukiomatematiikan ja yliopistomatematiikan välillä, mutta näiden kahden avovastauksen perusteella tämä tavoite ei ole toteutunut kyseisten opiskelijoiden kohdalla. Tämän tutkimuksen perusteella on mahdotonta tietää opiskelijoiden omaa aktiivisuutta kurssilla tai ohjaukseen osallistumista. Vastaukset ovat myös niin lyhyitä, ettei niistä voi tulkita, miksi todistamisen oppiminen on tuntunut niin mahdottomalta.

Koin alunperin kurssin alkupuoliskolla, että voisin oppia tätä asiaa, mutta kurssin loppua kohti tuli toisenlainen olo.

Kurssin tehtäviä tehdessä tunsin paljon riittämättömyyttä ja ymmärtämättömyyttä. Olen aina ennen matematiikassa pärjännyt melko hyvin, mutta nyt on tullut seinä vastaan.

7.4 Tulosten yhteenveto

Tässä tutkimuksessa opiskelijoiden kokemista tunteista muodostettiin yhteensä 45 erilaista tunnetta kuvaavaa luokkaa. Nämä luokat ja kunkin luokan saama mainintojen lukumäärä on esitelty luvussa 7.1.1. Todistamisen oppimisen voi tämän tutkimuksen mukaan sanoa olevan tunteita herättävä prosessi. Luvussa 7.1.2 puolestaan tarkasteltiin yleisimmin koettuja tunteita, jotka syksyn 2019 Johdatus yliopistomatematiikkaan -kurssilaisten raportointien mukaan ovat haaste, epävarmuus, mielenkiinto, turhautuminen, neutraali, vaikeus ja hankaluus, onnistumien, voimakas mielihyvä ja ilo. Suurin osa näistä yleisimmin koetuista tunteista voidaan tutkijan tulkinnan mukaisesti nähdä positiivisina aktivoivina tunteina, ja täten

niiden voi sanoa olevan tässä tutkimuksessa käytetyn käsitteellistämisen ja analyysin apuna toimineen Feldman Barrettin ja Russellin (1998) mallin mukaan todistamisen oppimisen kannalta hyödyllisiä. Myös tarkasteltaessa kaikkia 45 erilaista tunnetta, saavat positiiviset aktivoivat tunteet huomattavasti eniten mainintoja. Kun opiskelijoiden kokemat negatiiviset tunteet otetaan huomioon, on tällöinkin todistamisen oppimisen kannalta hyödyllisiä eli aktivoivia tunteita lähes kaksinkertainen määrä haitallisiin eli ei-aktivoiviin tunteisiin verrattuna.

Tarkasteltaessa syvällisemmin yleisimmin koettuja tunteita luvussa 7.1.3 selvisi, että opiskelijan kokemat tunteet vaihtelivat todistuksen eri vaiheissa. Todistustehtävän tekemiseen voi siis nähdä tutkijan tulkinnan mukaan liittyvän tunteiden kaaren, jossa alussa tyypillisiä tunteita ovat vaikeus ja hankaluus, haaste, epävarmuus, mielenkiinto ja turhautuminen. Todistustehtävää tehdessä saattoi esiintyä monia erilaisia tunnetiloja, mutta opiskelijoiden vastauksissa korostui todistamiseen liittyvistä haasteista nauttiminen. Vaikuttaakin siltä, että haasteen tunnetta raportoineista opiskelijoista suurella osalla oli hallintasuuntautunut tavoiteorientaatio. Todistuksen loppuvaiheessa koettiin tyypillisesti positiivisia ja aktivoivia tunteita, kuten onnistumisen kokemuksia ja palkitsevuuden tunteita.

Tutkimuksessa selvitettiin myös, miten opiskelijoiden vastauksissa näkyi heidän käyttämänsä selviytymiskeinot negatiivisia tunteita kohdatessa. Näistäkin luvussa 7.2.2 kuvatuista, opiskelijoiden raporteista tulkituista, kymmenestä selviytymiskeinosta yhdeksän voi nähdä olevan oppimisen kannalta hyödyllisiä strategioita.

Viimeisenä tutkimuksessa kiinnitettiin huomiota opiskelijoiden vastauksiin, joissa korostui selvä muutos todistamiseen liittyvissä tunteissa ja asenteissa kurssin aikana. Näistä kuudestatoista muutosta kuvaavasta vastauksesta 14 voidaan nähdä todistamisen oppimista edistäväksi muutokseksi opiskelijan asenteissa.

8 Luotettavuus

Seuraavaksi pohditaan tämän tutkimuksen luotettavuutta erilaisten näkökulmien kautta. Tuomen ja Sarajärven (2018, s.163-165) mukaan näiden näkökulmien lisäksi on oleellista, että tutkimuksen luotettavuutta arvioitaessa sitä tarkastellaan kokonaisuutena, sillä sisäinen johdonmukaisuus on keskeisessä asemassa. He mainitsevat luotettavuuden tarkastelun olevan tärkeää erityisesti laadullisessa tutkimuksessa (Tuomi & Sarajärvi, 2018, s.182). Laadullisen tutkimuksen muodostaman kokonaisuuden kannalta Tuomi ja Sarajärvi (2018, s. 76) tuovat esiin tutkimusperinteessä keskeiseen ymmärtämiseen liittyvän problematiikan. Haaste toisen ihmisen ymmärtämisessä tulee laadullisessa tutkimuksessa esiin kahdesti; tutkijan yrittäessä ymmärtää tutkimukseen osallistunutta tiedonantajaa, sekä toisen ihmisen yrittäessä ymmärtää tutkijan laatimaa tutkimusraporttia. Nämä ymmärtämiseen liittyvät haasteet ovat läsnä tässäkin laadullisessa tutkimuksessa, ja tuovat omat sävöyksensä sille, miten luotettavana tutkimusta pitää. Vaikka tutkittuja vastauksia on pyritty tulkitsemaan puolueettomasti, on mahdollista, että tutkijan omat ominaisuudet ovat vaikuttaneet aineistosta tehtyihin havaintoihin (Tuomi & Sarajärvi, 2018, s.160). Esimerkiksi tunteiden jaottelu nelikenttään toisessa tutkimuskysymyksessä on vaatinut tutkijalta aineiston tulkitsemista, joten toisen tutkijan tekemä jaottelu saattaisi poiketa tässä tutkimuksessa esittelystä.

Tämän tutkimuksen tarkoituksena oli kuvata, analysoida ja tulkita Johdatus yliopistomatematiikkaan -kurssin osallistujien kokemia tunteita matemaattiseen todistamiseen liittyen. Tutkimuksen kohdejoukkona olivat syksyn 2019 kurssin opiskelijat. Johdatus yliopistomatematiikkaan on kuitenkin kurssi, jota aktiivisesti kehitetään ja muokataan tutkimustiedon perusteella. Vuosien varrella kurssin opetus-, suoritus- ja arviointimenetelmät ovat olleet muutoksessa, esimerkiksi vuosina 2011 ja 2016 on käytetty flipped learning -menetelmää, vuonna 2018 kurssin arviointi koki muutoksen, ja samana vuonna kurssin suorittaminen kokonaan verkossa tuli mahdolliseksi. Tietokonetehtävät löysivät tiensä kurssille ensimmäistä kertaa syksyllä 2019. (Häsä, matematiikan opetuksen seminaari, 3.4.2020.) Kurssi on muuttunut huomattavasti siitä, kun tutkija itse kävi kyseisen kurssin keväällä 2015, jolloin kaikki tehtävät palautettiin paperisina, ja kurssiin

kuului lopputentti. Affekteista erityisesti tämän tutkimuksen mielenkiinnon kohteena olleet tunteet ovat yleensä hyvin nopeita ja tilannesidonnaisia, jolloin ne myös muuttuvat herkästi. Onkin siis hyvin mahdollista, että tutkittaessa samaa ilmiötä samalla kurssilla jonain toisena vuonna, saattaisivat tulokset poiketa tässä tutkimuksessa esitellyistä. Luotettavuutta parantaisi merkittävästi se, että samanlainen kysely tehtäisiin järjestelmällisesti saman kurssin osanottajille useampina vuosina.

Aineisto kerättiin kurssin loppupuolella joulukuun aikana sähköisesti kurssin Moodle-alustalla. Aineisto on kokeneiden tutkijoiden keräämänä harkittu ja huolellisesti toteutettu. Kysymys, jonka avoimia vastauksia tämä tutkimus analysoi, selvittää, millaisia tunteita opiskelija kokee, kun hänen on todistettava jotain matematiikassa. Osa opiskelijoiden vastauksista antaa listauksen erilaisista tunteista niitä sen kummemmin selittelemättä, kun taas osa vastaa kysymykseen laajemmin. Näin ollen perusteluja eri tunteille ei ole voitu löytää jokaisesta vastauksesta, vaan nämä tulokset perustuvat niihin vastauksiin, jotka ovat kertoneet tunteidensa taustalla olevista tekijöistä. Osaan tutkimuskysymyksiä oli löydettyvissä vastauksia edellä mainitun mukaisesti siis vain tutkimuksen kohdejoukon vastausten pienestä osajoukosta; esimerkiksi vain 16 vastauksessa näkyi viitteitä asenteiden muutoksesta. Lisäksi läheskään kaikki negatiivisia tunteita raportoineet eivät vastauksissaan kertoneet käyttämistään selviytymiskeinoista. Nämä tutkimuskysymykset eivät näin ollen tähtää yleistämiseen, vaan niiden voi katsoa täydentävän kokonais kuvaa todistamiseen liittyvistä tunteista ja tarjoilevan mielenkiintoisia yksityiskohtia opiskelijoiden affekteista. Vaikka tulokset voidaan näiden kysymysten osalta nähdä selvästi heikompina, antavat ne silti arvokasta tietoa opiskelijoiden näkemyksistä, joita olisi mielenkiintoista lähteä selvittämään systemaattisesti ja kattavasti uusilla tutkimuksilla. Laadullisen tutkimusperinteen mukaan tilastollisten yleistysten sijaan tässäkin tutkimuksessa on pyritty kuvaamaan, ymmärtämään ja tulkitsemaan teoreettisesti (Tuomi & Sarajärvi, 2018, s.98) Johdatus yliopistomatematiikkaan -kurssilaisten tunteita ja asenteita. Laadullisen tutkimuksen merkitys voidaan nähdä uusien ajatuksien, hypoteesien ja tutkimuskysymysten esittämisessä tulevaisuutta varten.

Kuten tunteista on teoriaosassa todettu, on niiden mittaaminen pitkään nähty ongelmalliseksi juuri sen vuoksi, että ne ovat nopeita muuttumaan (esim.

McLeod, 1992). Tämä asettaa omat haasteensa myös tämän tutkimuksen mukaiseen tunteiden tutkimiseen, jossa aineisto on kerätty yhdestä kysymyksestä loppukurssista, ja opiskelija on valinnut vastaukseen tietyn ajankohdan. Voi olla, että esimerkiksi huonon päivän tai rankan viikon ollessa takana opiskelijoiden vastaukset ovat negatiivisempia kuin muutoin. Myöskään omien tunteiden arviointi jälkikäteen ei välttämättä ole kovin helppoa, vaikka toki yliopisto-opiskelijoiden voi olettaa kykenevän tähän. Osasta vastauksia saattoi tulkita tämän kaltaisia, mahdollisesti mittausajankohtaan liittyviä, vaikeuksia: omia tunteita ei tunnistettu, tai jostain muusta syystä haluttu raportoida. Voi myös olla, että osa ei ole vastannut totuudenmukaisesti, tai halunnut muuten käyttää aikaa kyselyyn. Nämä seikat heikentävät tutkimuksen luotettavuutta. Näitä itseraportointiin ja yhteen mittausajankohtaan liittyviä ongelmia olisi mahdollista välttää käyttämällä monipuolisempia mittauskeinoja ja pitkäikäistä tutkimusta.

Tunteet – ja affektit ylipäänsä – ovat kulttuurisidonnaisia. Esimerkiksi Tsai (2007) esittää, että ihanteelliseen positiiviseen affektiin liitetyissä aktivaatiotasoissa on kulttuurisia eroja. Aasialaiset mieltävät tyypillisesti matalamman kiihtymystason positiiviset affektiiviset tilat tavoiteltavimmiksi, kun taas länsimaalaiset suosivat korkeamman aktivaatiotason positiivisia emotioita. Pekrun (2014) kuitenkin huomauttaa, että vaikka yksilöllisten erojen takana voidaan nähdä kulttuuriin, etnisyyteen, sukupuoleen, kouluun ja koululuokkaan liittyviä tekijöitä, erot emotioissa ovat pienempiä eri kulttuurien välillä kuin yhden kulttuurin sisällä. Vain pieni osa yksilöllisestä vaihtelusta voidaan hänen mukaansa selittää edellä mainituilla tekijöillä, sillä erot johtuvat opiskelijoiden yksilöllisistä ja ainutlaatuisista eroista, eivät niinkään ryhmäjäsenyyksistä.

Lopuksi on todettava, että todistamisen oppimiseen liittyviä tunteita on mahdollista tarkastella myös muiden teorioiden tai viitekehysten avulla kuin mihin tässä tutkimuksessa on päädytty. Esimerkiksi Pekrunin ja Stephensin (2010) saavutustunteiden jaottelu oppimisen tuloksiin ja toisaalta oppimisaktiviteetteihin liittyen olisi tätä tutkimusta ohjaavana teoriana saattanut tuoda esiin toisenlaisia näkökulmia, kuin mihin tässä tutkimuksessa päädyttiin, kun käytettiin Feldman Barrettin ja Russellin (1998) mallia.

9 Pohdintaa

Tässä tutkimuksessa tutkittiin syksyllä 2019 kerätyn aineiston perusteella Helsingin yliopiston Johdatus yliopistomatematiikkaan -kurssin opiskelijoiden maattiseen todistamiseen liittyviä tunteita. Opiskelijoiden kirjoittamia avoimia vastauksia analysoitiin laadullisella sisällönanalyysillä, ja kiinnostuksen kohteena olivat kurssilaisten kokemat erilaiset tunteet, niiden yleisyys ja hyödyllisyys tai haitallisuus (ts. aktivoivuus tai ei-aktivoivuus) todistamisen oppimisen kannalta, opiskelijoiden pohdinnat yleisimmistä tunteista sekä negatiivisista tunteista selviytymisestä, ja todistamiseen liittyvien asenteiden kehittyminen kurssin aikana. Kurssilaiset raportoivat vastauksissaan monipuolisesti erilaisia tunnekokemuksia. Todistamisen oppimisen yliopistossa voi täten sanoa olevan emotionaalisesti latautunut tapahtuma. Yleisimmin koetut tunteet opiskelijoiden raportoiman mukaisesti ovat järjestyksessä lueteltuina haaste, epävarmuus, mielenkiinto, turhautuminen, neutraali, vaikeus ja hankaluus, onnistuminen, voimakas mielihyvä ja ilo. Seitsemän näistä yhdeksästä yleisimmin ilmenevästä tunteesta tulkittiin tässä tutkimuksessa käytetyn analyysia ohjanneen teorian mukaisesti todistamisen oppimisen kannalta hyödyllisiksi tunteiksi. Myös tarkasteltaessa kaikkia raportoituja tunteita, kunkin tunteen esiintymistä aineistossa, sekä niiden tulkittua sijoittumista Feldman Barrettin ja Russellin (1998) mallin nelikenttään saivat oppimisen kannalta hyödylliset eli aktivoivat tunteet kaksinkertaisen määrän mainintoja haitallisiin eli ei-aktivoiviin nähden. Asteiden muutosta selvitetessä havaittiin, että positiiviset affektit olivat lisääntyneet ja negatiiviset lieventyneet kurssin kuluessa. Näiden huomioiden ja tulkintojen voi katsoa antavan viitteitä siitä, että Helsingin yliopiston Johdatus yliopistomatematiikkaan -kurssi tukee opiskelijoiden todistamisen oppimisen kannalta hyödyllisiä tunteita ja asenteita. Tavoiteorientaatioita, erilaisia opiskelustrategioita tai opiskelijoiden suoriutumista ei kuitenkaan tässä tutkimuksessa selvitetty. Nämä olisivat kiinnostavia jatkotutkimusaiheita, mikäli haluttaisiin selvittää, kuinka hyödyllisiä tässä tutkimuksessa esitellyt todistamisen oppimisen kannalta hyödyllisiksi käsitteellistetyt tunteet todella ovat. Myös opiskelijoiden todistamiskäsitysten ja todistamiseen liittyvien affektiivisten tekijöiden yhteyttä olisi mielenkiintoista selvittää.

On kuitenkin huomattava, että tarkasteltaessa opiskelijoiden kokemia tunteita Feldman Barrettin ja Russelin (1998) mallin mukaan nelikentittäin tutkijan tulkinnan mukaan jaoteltuina nähdään, että kurssilla esiintyi myös paljon negatiivisia tunteita. Kun tutkittiin opiskelijoiden vastauksissa ilmeneviä selviytymiskeinoja, selvisi, että niissä kuvailtiin suurimmaksi osaksi strategioita, jotka voidaan nähdä oppimisen kannalta hyödyllisiksi. Voi kuitenkin olla, että näistä negatiivisiin tunteisiin liittyvistä selviytymiskeinoista kirjoittivat enimmäkseen menestyvät ja pärjäävät opiskelijat. Miten epämiellyttäviä affektiivisia tiloja kokevien ja heikosti suoriutuvien oppimista olisi mahdollista tukea satojen opiskelijoiden massakursseilla? Tehostetun kisällioppimisen menetelmässä opetuksen resurssit on suunnattu oppimisvaiheeseen, ja syksyn 2019 Johdatus yliopistomatematiikkaan -kurssillakin ohjausta oli tarjolla kaikkina arkipäivinä usean tunnin ajan. Kaikki eivät kuitenkaan osallistu ohjaukseen, jolloin oppimisen tukeminen vaikeutuu. Epäselväksi jää myös, kuinka haitallista tässä tutkimuksessa oppimisen kannalta haitallisiksi käsitteellistettyjen negatiivisten tai positiivisten ei-aktivoivien tunteiden kokeminen todistamisen oppimisen kannalta oikein on.

Dreyfusin (1999) mukaan todistamisen oppiminen yliopiston johdantokursseilla on haastavaa. Todistamisen oppimisen kokeminen haasteena oli myös tämän tutkimuksen mukaan yleisin yksittäinen aineistossa esiintyvä tunne. Yksi Dreyfusin mainitsemista haasteista on matemaattinen kirjoittaminen. Matemaattinen kirjoittaminen on eräs kurssin tavoitteista, joka tuli esiin myös tämän tutkimuksen opiskelijoiden vastauksissa haasteen, epävarmuuden ja turhautumisen tunteiden yhteydessä. Toisaalta matemaattinen kirjoittaminen tuotti myös iloa. Dreyfusin mukaan oppimateriaaleissa on vaikea välittää kaikkea todistamisen kannalta olennaista. Syksyn 2019 Johdatus yliopistomatematiikkaan -kurssin suoritus koostui monipuolisesta valikoimasta erilaisia tehtäviä, uutuutena automaattisen palautteen tietokonetehtävät. Lisäksi videoidut luentotallenteet olivat saatavilla kurssin Moodle-alustalla. Yhdessäkään opiskelijan avovastauksessa ei puhuttu yleisesti kurssin oppimateriaaleista, vaan tunteiden taustalla oli usein yksittäisen tehtävän vaatavuustasoon liittyviä syitä; tehtävä saatettiin kokea vaihtoehtoisesti joko liian vaikeana, tai liian triviaalina. Oppimateriaalien kehittyminen voidaankin nähdä erittäin positiivisena muutoksena niin todistamisen kuin muunkin oppimisen ja opiskelun kannalta.

Eräs mielenkiintoinen opiskelijoiden vastauksista ilmennyt yksityiskohta on, kuinka opiskelijat kuvasivat vaikeiden todistustehtävien selvittämiseen liittyvän mielihyvän ja palkitsevuuden tunteen erityisen voimakkaaksi. Lisäksi tutkittaessa opiskelijoiden esittämiä selityksiä liittyen yleisimmin koettuihin tunteisiin selvisi, että moni nautti todistustehtävän tekemiseen liittyvästä haasteen tunteesta. Vaikuttaakin siltä, että Johdatus yliopistomatematiikkaan -kurssilaisten joukossa on erittäin motivoituneiden ja mestaruusorientoituneiden opiskelijoiden muodostama osajoukko. Nämä opiskelijat ovat motivoituneita haastamaan itseään ja kehittämään matemaattisia taitojaan syvälliseen oppimiseen johtavilla oppimisstrategioilla. Helsingin yliopiston matematiikan ja tilastotieteen osaston emeritusprofessori Juha Oikkonen luennoillaan usein mainitsi eksperttien ja noviisien suhtautumistapojen eroista erityisesti haastaviin ongelmatehtäviin liittyen; siinä missä noviisi lannistuu, ekspertti innostuu! Tämä tutkimus antaa viitteitä siitä, että jo pienellä osalla Johdatus yliopistomatematiikkaan -kurssin opiskelijoista vaikuttaa olevan todistamiseen ”tulevan ekspertin asenne”.

Kun yksittäisten tunteiden perusteluita tutkittiin yleisimpiin tunteisiin liittyen, selvisi, että yhdenkin todistustehtävän tekemisen aikana saattoi ilmetä useita erilaisia tunteita. Nämä huomiot ovat linjassa muun muassa D'Mellon ja Graesserin (2012) sekä Di Leon, Muisin, Singhin ja Psaradelliksen (2019) tulkinnoista tehtävänäikaisesta emotioiden vaihtelusta. Tässä tutkimuksessa todistustehtävään vaikutti liittyvän erilaisia tunteita riippuen tehtävän vaiheesta. Alussa korostuivat haasteen ja mielenkiinnon lisäksi negatiivisemmat tunteet, keskivaiheilla ilmeni tunteita laidasta laitaan, ja lopussa koettiin eniten positiivissävytteisiä tunteita. Tehtävän valmiiksi saattaminen vaikuttaa siis olevan keskeisessä osassa sille, että yksilö kokee onnistuneensa matemaattisessa tehtävässä ja saa positiivisia kokemuksia. Tässä tutkimuksessa yksittäisten tunteiden syvällisempi analyysi tehtiin vain yleisimmin raportoitujen tunteiden kohdalla. Eräs mahdollinen jatko-tutkimusaihe olisi analysoida kaikki opiskelijoiden kokemat tunteet samalla tarkkuudella. Esimerkiksi Helsingin yliopiston matematiikan ja tilastotieteen osaston johtaja ja professori Tuomas Hytönen sanoo Ylioppilaslehden (Onninen, 2011) haastattelussa *oivalluksen* olevan kaikkein tärkein hetki matemaattisten läpimurtojen kannalta. Vaikka Johdatus yliopistomatematiikkaan -kurssilla ei vielä mate-

maattisia läpimurtoja tapahdukaan, toimivat opiskelijat oman senhetkisen osaamisensa äärirajoilla, ja läpimurtojen voi katsoa liittyvän oman ajattelun kehittymiseen.

Tässä tutkimuksessa luotiin näkemystä siitä, millaisia todistamiseen liittyviä tunteita opiskelijoiden keskuudessa ilmenee Helsingin yliopiston Johdatus yliopistomatematiikkaan -kurssilla. Tutkimuksen tulokset voidaan nähdä merkittävinä ja mielenkiintoisina erityisesti kyseisen kurssin kehitystyön ja kurssin opetushenkilöstön kannalta. Tutkimuksen voi myös katsoa kertovan yleisesti todistamiseen liittyvistä tunteista transitiovaiheessa, siirryttäessä opiskelemaan matematiikkaa yliopistoon. Pekrun (2014) esittää, että emootioiden yksilölliset erot ovat suurempia kuin erot tietyn kulttuurin, kuten koulun tai koululuokan, sisällä. Malinen (1998) näkee todistamisen olevan osa laajempaa ongelmanratkaisun prosessia. Täten tutkimuksen voidaan nähdä olevan kiinnostava yleisesti matemaattiseen ongelmanratkaisuun liittyvien tunteiden kannalta, luokka-asteesta riippumatta. Di Leo ym. (2019) toteavat D'Mellon ja Graesserin (2012) oletusten epävarmuuden tilojen kohtaamisesta ja niitä seuraavista tunteista pätevän myös perusasteen opiskelijoille.

Tutkimuksen tekeminen on tuonut esiin monia uusia, kiinnostavia näkökulmia myös tutkijan tulevan opettajanuran kannalta. Erityisesti oppimiseen kuuluvat negatiiviset tunteet mietityttävät; mikäli yliopisto-opiskelijatkin kokevat paljon negatiivisia tunteita uusia asioita opetellessaan, voi vain kuvitella, miten paljon epämiellyttäviä affekteja matematiikkaan liittyen oppilaat kokevat esimerkiksi yläkoulussa. Toisaalta teoriaosassa affekteihin liittyvä tulos, jonka mukaan syvälinen oppiminen edellyttää hämmennyksen tunnetta, on tulevan opettajan näkökulmasta myös haastava, sillä opettajana olisi kyettävä toisaalta sekä ylläpitämään sitoutumis-hämmennys-syklejä, että ehkäisemään hämmennys-turhautumis-tylistymis-kierteiden syntymistä. Myös se, miten opettajan olisi mahdollista edistää hallintasuuntautuneita tavoiteorientaatiota oppilaissa, mietityttää. Lohdullista oman opettajuuden kannalta kuitenkin on, kuinka tutkimusprosessi on opettanut, ettei kaikkia negatiivisia tunteita ei voi pitää oppimisen kannalta haitallisina. Matematiikanopiskeluun näyttääkin liittyvän hyvin monenlaisia tunteita, jotka viriävät mitä erilaisimmista yksilöllisistä kokemuksista ja tulkinnoista. Uskon tämän olevan arvokas oppi tulevan opettajanuran kohtaamisille, jossa jokainen oppilas ja opiskelija tuovat tilanteisiin koko siihenastisen henkilöhistoriansa.

Lähteet

Ames, C. (1992). Classrooms: Goals, structures, and student motivation. *Journal of educational psychology*, 84(3), 261.

Aubin, R. (1979). Mechanizing structural induction part I: Formal system. *Theoretical Computer Science*, 9(3), 329-345.

Balacheff, N. (1991). The benefits and limits of social interaction: The case of mathematical proof. In *Mathematical knowledge: Its growth through teaching* (pp. 173-192). Springer, Dordrecht.

Bell, A. W. (1976). A study of pupils' proof-explanations in mathematical situations. *Educational studies in mathematics*, 23-40.

Bower, G. H. (1992). How might emotions affect learning. *The handbook of emotion and memory: Research and theory*, 3, 31.

Burstall, R. M. (1969). Proving properties of programs by structural induction. *The Computer Journal*, 12(1), 41-48.

Cabanac, M. (2002). What is emotion? *Behavioural processes*, 60(2), 69-83.

Carver, C. S., & Scheier, M. F. (1990). Origins and functions of positive and negative affect: a control-process view. *Psychological review*, 97(1), 19.

Cavanagh, S. (1997). Content analysis: concepts, methods and applications. *Nurse researcher*, 4(3), 5-16.

Cupillari, A. (2011). *The nuts and bolts of proofs: An introduction to mathematical proofs*. Academic Press.

D'Mello, S., & Graesser, A. (2012). Dynamics of affective states during complex learning. *Learning and Instruction*, 22(2), 145-157.

Davis, P., Hersh, R., & Marchisotto, E. A. (2011). *The mathematical experience*. Springer Science & Business Media.

de Villiers, M. (2010). Experimentation and proof in mathematics. In *Explanation and proof in mathematics* (pp. 205-221). Springer, Boston, MA.

Di Leo, I., Muis, K. R., Singh, C. A., & Psaradellis, C. (2019). Curiosity... Confusion? Frustration! The role and sequencing of emotions during mathematics problem solving. *Contemporary Educational Psychology*, 58, 121-137.

Dreyfus, T. (1999). Why Johnny can't prove. In *Forms of mathematical knowledge* (pp. 85-109). Springer, Dordrecht.

Dweck, C. S., & Leggett, E. L. (1988). A social-cognitive approach to motivation and personality. *Psychological review*, 95(2), 256.

Fallis, D. (1997). The epistemic status of probabilistic proof. *The Journal of Philosophy*, 94(4), 165-186.

Feldman Barrett, L., & Russell, J. A. (1998). Independence and bipolarity in the structure of current affect. *Journal of personality and social psychology*, 74(4), 967.

Fennema, E., & Sherman, J. A. (1976). Fennema-Sherman mathematics attitudes scales: Instruments designed to measure attitudes toward the learning of mathematics by females and males. *Journal for research in Mathematics Education*, 7(5), 324-326.

Finlow-Bates, K., Lerman, S., & Morgan, C. (1993). A survey of current concepts of proof held by first year mathematics students. In *Proceedings of the 17th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 252-259).

Franklin, J., & Daoud, A. (1988). *Introduction to proofs in mathematics*. Prentice Hall.

Hammack, R. (2018) *Book of Proof*. Luettu: 21.2.2020. Saatavissa: <https://www.people.vcu.edu/~rhammack/BookOfProof/Main.pdf>

Hanna, G. (1990). Some pedagogical aspects of proof. *Interchange*, 21(1), 6-13.

Hanna, G. (1995). Challenges to the importance of proof. *For the Learning of mathematics*, 15(3), 42-49.

Hannula, M. S. (2002). Attitude towards mathematics: Emotions, expectations and values. *Educational studies in Mathematics*, 49(1), 25-46.

Harmon-Jones, E., Gable, P. A., & Price, T. F. (2013). Does negative affect always narrow and positive affect always broaden the mind? Considering the influence of motivational intensity on cognitive scope. *Current Directions in Psychological Science*, 22(4), 301-307.

Hautala, T., Romu, T., Rämö, J. & Vikberg, T. (2012). Extreme apprenticeship method in teaching university-level mathematics. Proc. of the 12th International Congress on Mathematical Education, ICME 2012.

Haydon, G. (2007). *Values in education*. Bloomsbury Publishing.

Heinze, A., Reiss, K., & Franziska, R. (2005). Mathematics achievement and interest in mathematics from a differential perspective. *ZDM*, 37(3), 212-220.

Helsingin yliopiston DISA-työkalu (2019). Johdatus yliopistomatematiikkaan, kevät 2019. Luettu 25.2.2020. Saatavissa: <https://disa.cs.helsinki.fi/courses/matrix/17>

Helsingin yliopiston Kurssit (2019). Johdatus yliopistomatematiikkaan. Luettu 04.02.2020. Saatavissa: <https://courses.helsinki.fi/fi/mat11001>

Helsingin yliopiston Moodle (2019). Johdatus yliopistomatematiikkaan. Luettu 05.02.2020. Saatavissa: <https://moodle.helsinki.fi/course/view.php?id=34388>

Hersh, R. (1993). Proving is convincing and explaining. *Educational Studies in Mathematics*, 24(4), 389-399.

Hopcroft, J. E., Motwani, R., & Ullman, J. D. (2001). Introduction to automata theory, languages, and computation. *Acm Sigact News*, 32(1), 60-65.

Häsä, J., (2020, 04, 03). Matematiikan opetuksen etäseminaari. Johdatus yliopistomatematiikkaan -kurssin esittelyä.

Jarden, D. (1953). A simple proof that a power of an irrational number to an irrational exponent may be rational. *Scr. Math*, 19, 229.

Keef, P., Guichard, D., & Gordon, R. (2013). An introduction to higher mathematics.

Kleine, M., Goetz, T., Pekrun, R., & Hall, N. (2005). The structure of students' emotions experienced during a mathematical achievement test. *ZDM*, 37(3), 221-225.

Krantz, S. G. (2007). *The history and concept of mathematical proof* (Vol. 5). February.

Lahdenperä, J., Postareff, L., & Rämö, J. (2019). Supporting quality of learning in university mathematics: A comparison of two instructional designs. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 5(1), 75-96.

Lakatos, I. (2015). *Proofs and refutations: The logic of mathematical discovery*. Cambridge university press.

Lazarus, R.S.: 1991, *Emotion and Adaptation*, Oxford University Press, New York, Oxford.

Linnenbrink, E. A. (2007). The role of affect in student learning: A multi-dimensional approach to considering the interaction of affect, motivation, and engagement. In *Emotion in education* (pp. 107-124). Academic Press.

Linnenbrink, E. A., & Pintrich, P. R. (2002). Achievement goal theory and affect: An asymmetrical bidirectional model. *Educational psychologist*, 37(2), 69-78.

Malinen, P. (1998). Oppilaiden kehittyminen todistamisajatteluun. *Teoksessa Räsänen, P., Kupari, P., Ahonen, T. & Malinen, P.(toim.) Matematiikka–näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Jyväskylä: Niilo Mäki instituutti & Koulutuksen tutkimuslaitos*, 99-110.

Mandler, G. (1989). Affect and learning: Causes and consequences of emotional interactions. In *Affect and mathematical problem solving* (pp. 3-19). Springer, New York, NY.

Martínez-Sierra, G., & del Socorro García-González, M. (2016). Undergraduate mathematics students' emotional experiences in Linear Algebra courses. *Educational Studies in Mathematics*, 91(1), 87-106.

McLeod, D. B. (1989). The role of affect in mathematical problem solving. In *Affect and mathematical problem solving* (pp. 20-36). Springer, New York, NY.

McLeod, D. B. (1992). Research on affect in mathematics education: A reconceptualization. *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, 1, 575-596. Saatavissa: <http://www.peteriljedahl.com/wp-content/uploads/Affect-McLeod.pdf>

Moore, R. C. (1994). Making the transition to formal proof. *Educational Studies in mathematics*, 27(3), 249-266.

Oinonen, L. (2016) *Johdatus yliopistomatematiikkaan*. Luettu: 21.2.2020. Saatavissa: https://moodle.helsinki.fi/pluginfile.php/2577022/mod_resource/content/2/JYMmoniste.pdf

Onninen, O. (2011, 9, 18). Akatemiatutkija Tuomas Hytönen sai yli miljoona euroa matikkaan. *Ylioppilaslehti*. Luettu 27.4.2020. Saatavissa: <https://ylioppilaslehti.fi/dev/2011/09/akatemiatutkija-tuomas-hytonen-sai-yli-miljoona-euroa-matikkaan/>

Pekrun, R. (2006). The control-value theory of achievement emotions: Assumptions, corollaries, and implications for educational research and practice. *Educational psychology review*, 18(4), 315-341.

Pekrun, R. (2014). Emotions and learning. *Educational practices series*, 24.

Pekrun, R., Goetz, T., Titz, W., & Perry, R. P. (2002). Academic emotions in students' self-regulated learning and achievement: A program of qualitative and quantitative research. *Educational psychologist*, 37(2), 91-105.

Pekrun, R., & Stephens, E. J. (2010). Achievement emotions in higher education. In *Higher education: Handbook of theory and research* (pp. 257-306). Springer, Dordrecht.

Pintrich, P. R. (2000). The role of goal orientation in self-regulated learning. In *Handbook of self-regulation* (pp. 451-502). Academic Press.

Popham, W. J. (2009). Assessing Student Affect. *Educational Leadership*, 66(8), 85-86.

Richardson, F. C., & Suinn, R. M. (1972). The mathematics anxiety rating scale: psychometric data. *Journal of counseling Psychology*, 19(6), 551.

Rosenberg, E. L. (1998). Levels of analysis and the organization of affect. *Review of general psychology*, 2(3), 247-270.

Rämö, J., Reinholz, D., Häsä, J., & Lahdenperä, J. (2019). Extreme Apprenticeship: Instructional change as a gateway to systemic improvement. *Innovative Higher Education*, 44(5), 351-365.

Satyam, V. R. (2018). *Cognitive and Affective Components of Undergraduate Students Learning How to Prove*. Michigan State University.

Schoenfeld, A. H. (2014). *Mathematical problem solving*. Elsevier.

Schwarz, N. (1990). *Feelings as information: Informational and motivational functions of affective states*. The Guilford Press.

Sierpinska, A. (1994). *Understanding in mathematics* (Vol. 2). Psychology Press.

Stylianou, D. A., Blanton, M. L., & Rotou, O. (2015). Undergraduate students' understanding of proof: Relationships between proof conceptions, beliefs, and classroom experiences with learning proof. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 1(1), 91-134.

Suppes, P. (1972). *Axiomatic set theory*. Courier Corporation.

Tall, D. (2008). The transition to formal thinking in mathematics. *Mathematics Education Research Journal*, 20(2), 5-24.

Tellegen, A., Watson, D., & Clark, L. A. (1999). On the dimensional and hierarchical structure of affect. *Psychological science*, 10(4), 297-303.

Thayer, R. E. (1986). Activation-deactivation adjective check list: Current overview and structural analysis. *Psychological reports*, 58(2), 607-614.

Tsai, J. L. (2007). Ideal affect: Cultural causes and behavioral consequences. *Perspectives on Psychological Science*, 2(3), 242-259.

Tuomi, J., & Sarajärvi, A. (2009). 5. uudistettu laitos. *Laadullinen tutkimus ja sisällönanalyysi*. Helsinki: Tammi.

Tuomi, J., & Sarajärvi, A. (2018). *Laadullinen tutkimus ja sisällönanalyysi*. Helsinki: Tammi.

Tuominen, H., Pulkka, A. T., Tapola, A., & Niemivirta, M. (2017). Tavoiteorientaatiot, oppiminen ja hyvinvointi. In *Mikä meitä liikuttaa: Motivaatiopsykologian perusteet* (pp. 80-98). PS-kustannus.

Tymoczko, T. (1979). The four-color problem and its philosophical significance. *The Journal of Philosophy*, 76(2), 57-83.

Vihavainen, A., Paksula, M., & Luukkainen, M. (2011). Extreme apprenticeship method in teaching programming for beginners. In *Proceedings of the 42nd ACM technical symposium on Computer science education* (pp. 93-98).

Vikberg, T. J., Oinonen, L. P. J., & Rämö, J. (2015). Tehostettu kisällioppiminen matematiikan yliopisto-opetuksessa. *Yliopistopedagogiikka*, 2015(1).

Villavicencio, F. T., & Bernardo, A. B. (2016). Beyond math anxiety: Positive emotions predict mathematics achievement, self-regulation, and self-efficacy. *The Asia-Pacific Education Researcher*, 25(3), 415-422.

Vygotsky, L. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes*. Cambridge: Harvard University Press.

Zan, R., Brown, L., Evans, J., & Hannula, M. S. (2006). Affect in mathematics education: An introduction. *Educational studies in mathematics*, 113-121.

Liitteet

LIITE 1

Tähän liitteeseen on koottu lukuun 3 liittyvää tarkempaa tietoa kurssisuorituksesta.

Taulukko palautusajoista. JYM-kurssin eri tehtävätyyppien palautusajat syksyllä 2019.*lopullinen palautus. Lähde: Moodle 2019.

tehtävä- tyyppi	tietokone	kirjalliset	itsearvi- ointi	sovellus	vertaisarvi- ointi
palautus- aika	ma klo 22	to klo 22	to klo 22 3.10. 14.11. 19.12.	pe klo 22 25.10. 6.12. su klo 22 22.12.*	pe klo 22 1.11. 13.12.

Taulukko kurssipisteiden kertymisestä tehtävätyyppien mukaan. Lähde: Moodle 2019.

tehtävä- tyyppi	kirjalliset	tieto- kone	erikois- alue	itsearvi- ointi	sovellushar- joitus	sovel- lus
kurssipis- teitä	30	30	10	10	5	15

Taulukko arvosanan määräytymisestä kurssipisteiden perusteella. Lähde: Moodle 2019.

kurssipis- teet	>40	>50	>60	>70	>80
arvosana	1	2	3	4	5

LIITE 2

Taulukossa A on listattu opiskelijoiden kokemat tunteet aakkosjärjestyksessä. Yhteensä saatiin 136 erilaista tunteeksi luokiteltavaa sanaa tai ilmausta. Vastaus ”riippuu tehtävästä” tai ”riippuu todistuksesta” otettiin tässä mukaan, sillä se korostui yhteensä 27 opiskelijan vastauksessa.

Taulukko A. Opiskelijoiden kokemat tunteet aakkosjärjestyksessä. *sisällytettiin mukaan toistuvuuden vuoksi.

ahdistus	kaavamaisuus	ristiriitaisia
alemmuus	kammo	saavutus
arvottomuus	kammottava	sekava
ei kiinnostava	kauhistus	sinnikkyys
ei tarpeellinen	kauhu	stressi
epäenerginen	keskittyneisyys	suorittaminen
epäjohdonmukaisuus	kiehtova	suuttumus
epäluottamus	kiinnostus	tekee mieli mennä googleen
epäluuloisuus	koukuttava	todistamisen arvostus
epämukavuus	kunnioitus	toivottomuus
epämääräisyys	kuormittavuus	tunteita hyvin paljon
epäonnistuminen	kyllästyminen	tuntuu turhalta
epäselvyys	kärsivällisyys	turhautuminen
epätietoisuus	lannistuminen	tuskastuneisuus
epätoivo	levottomuus	tyhjyyteen heittäytyminen
epäusko	luovuttaminen	tyhjä olo
epävarmuus	luovuus	tyhmyys
flow	mahdottomuus	tykkääminen
fyysinen kuormittuneisuus	masennus	tylsistyminen
haaste	mielekäs	tyydytys
halu oppia	mielenkiinto	tyytymättömyys
halu ratkaista	mielihyvä	tyytyväisyys
hankaluus	miellyttävä	työläys
hapuilevuus	monenlaisia tunteita	uskon puute
harmistuneisuus	motivaatio	uteliaisuus
hauskuus	mukava	uupumus
helpotus	määrätietoisuus	vaihtelevat
helpous	negatiivisia tunteita	vaikeus
hermostuneisuus	neutraali	vaivaantuneisuus
hirvitys	oivallus	varmuus
hukassa	onnistuminen	viha
huojennus	osaamattomuus	voitonriemu
huolestuneisuus	osaaminen	voitto
hyvä mieli	paine	vyyhtimäinen
hämmennys	palkitsevuus	vähemmyys
ilo	pelko	välttely

inho	pettymys	väsymys
innostus	pitäminen	yksitoikkoisuus
inspiraatio	positiivisia tunteita	ylitsepääsemättömyys
into	pää lyö tyhjää	ylpeys
intohimo	päätäväisyys	ymmärrys
itseinho	raivo	ymmärtämättömyys
itseluottamus	rasittavuus	älykkyyks
itsevarmuus	rasittuneisuus	ärtymys
jännitys	riippuu tehtävästä*	
jäykkyys	riittämättömyys	

LIITE 3

	lukumäärä
tunne	
ahdistus	26
alemmuus/arvottomuus/riittämättömyys/vähemmyys/tyytymättömyys	13
epäluottamus	2
epäluuloisuus	2
epäonnistuminen	1
epätietoisuus/hapuilevuus/epäjohdonmukaisuus/hukassa/epämääräisyys/epäselvyys	8
epätoivo/toivottomuus	18
epäusko/uskon puute	3
epävarmuus	70
flow	2
haaste	81
halu ratkaista/halu oppia	4
hankaluus	8
harmistuneisuus	4
hauskuus	9
helpotus/huojennus	6
helppous	7
hermostuneisuus	14
huolestuneisuus/levottomuus/epämukavuus	4
hämmennys	29
ilo	30
inho	3
innostus/into	30
itseinho	1
jännitys	29
jäykkyys	1
kauhu/kammo/kammottava/kauhistus/hirvitys	5
keskittyneisyys	13
kiehtova	4
koukuttava/intohimo	3
lannistuminen/masennus	4
luovuus	1
mielenkiinto/kiinnostus	54
mielihyvä/hyvä mieli/nautinto	12
motivaatio	4
määrätietoisuus/päätäväisyys/sinnikkyys/kärsivällisyys	3
negatiivisia tunteita	26
neutraali	63
oivallus	24
onnistuminen/osaaminen	37
osaamattomuus/ymmärtämättömyys	15

paine	1
palkitsevuus	18
pelko	12
pettymys	6
positiivisia tunteita	23
raivo	2
rasittuneisuus/fyysinen kuormittuneisuus/rasittavuus/epäenerginen/uupumus/väsymys	8
riippuu tehtävästä	27
saavutus	1
sekava/vaihtelevat/ristiriitaisia	4
stressi	6
suorittaminen	2
suuttumus	1
tekee mieli mennä googleen	1
todistamisen arvostus	11
tunteita hyvin paljon/monenlaisia tunteita	4
tuntuu turhalta/ei tarpeellinen/ei kiinnostava	10
turhautuminen	65
tuskastuneisuus/vaivaantuneisuus	7
tyhjyyteen heittäytyminen	1
tyhjä olo/pää lyö tyhjää	2
tyhmyys	4
tykkääminen/mukava/mielekäs/pitäminen/miellyttävä	24
tylsistyminen/kyllästymisen/yksitoikkoisuus/kaavamaisuus	8
tyytytys	9
tyytyväisyys	15
työläys/kuormittavuus	12
utelaisuus	11
vaikeus	25
varmuus/itsevarmuus/itseluottamus	10
viha	2
voitonriemu/voitto	4
välttely/luovuttaminen	3
ylitsepääsemättömyys/mahdottomuus	2
ylpeys	7
ymmärrys	4
ärtymys	15
älykkyyys	1
inspiraatio	2
kunnioitus	1
vyyhtimäinen	1

LIITE 4

	mainintojen lukumäärä ai- neistossa
tunne	
haaste	81
epävarmuus	70
mielenkiinto/kiinnostus/kiehtova/uteliaisuus	69
turhautuminen	65
neutraali	64
vaikeus/hankaluus/osaamattomuus/ymmärtämättömyys/tyhjä olo/pää lyö tyhjää	50
onnistuminen/osaaminen/saavutus	38
mielihyvä/nautinto/tyydytys/tyytyväisyys/hyvä mieli	36
ilo/voitonriemu/voitto	34
innostus	30
jännitys/jäykkyys	30
hämmennys	29
oivallus/ymmärrys	28
työläys/rasittavuus/stressi/uupumus/kuormittavuus/paine/väsymys	27
ahdistus	26
negatiivisia	26
mukava/kiva/ok	24
positiivisia	23
epätoivo/toivottomuus/epäusko/uskon puute	21
alemmuus/arvottomuus/riittämättömyys/vähemmyys/tyhmyys/tyytymättö- myys/itseinho	18
palkitsevuus	18
pelko/kauhu/kammo/kammottava/kauhistus/hirvitys	17
lannistuminen/masennus/pettymys/harmistuneisuus/epäonnistuminen	15
ärtymys	15
hermostuneisuus	14
keskittyneisyys	13
flow/koukuttava/intohimo/halu ratkaista/halu oppia/inspiraatio/luovuus	12
tuntuu turhalta/ei tarpeellinen/ei kiinnostava	10
varmuus/itsevarmuus/itseluottamus	10
hauskuus	9
epätietoisuus/epämääräisyys/epäselvyys/epäjohdonmukaisuus/hapuilevuus/hu- kassa	8
sekavia/monenlaisia tunteita	8
tylsistyminen/kyllästuminen/yksitoikkoisuus/kaavamaisuus	8
helpous	7
motivaatio/määrätietoisuus/päätäväisyys/sinnikkyys/kärsivällisyys	7
tuskastuneisuus/vaivaantuneisuus	7
ylpeys	7
helpotus/huojennus	6
raivo/viha/suuttumus	5
epäluottamus/epäluuloisuus	4

huolestuneisuus/levottomuus/epämukavuus	4
inho	3
välttely/luovuttaminen	3
ylitsepääsemättömyys/mahdottomuus	2
kunnioitus	1
tekee mieli mennä googleen	1
tyhjyyteen heittäytyminen	1
vyyhtimäinen	1
älykkyyys	1

LIITE 5

Yleisimmin koettujen tunteiden muodostamat luokat

Haaste

Haasteesta nauttiminen 33

Mitä haastavampi sitä palkitsevampi 16

Haasteena aloittaminen 9

Haaste negatiivisena 8

haaste neutraalina 7

todistuksen vaatima työmäärä ja panostus 7

Haaste ja hyödyllisyys 5

matemaattinen kirjoittaminen 4

induktiotodistukset 2

joukkoihin liittyvät todistukset 1

Epävarmuus

epävarmuus todistuksen pätevyydestä 23

epävarmuus ja harjoituksen puute/uusi asia 18

todistuksen aloittamiseen liittyvä epävarmuus 11

epävarmuus kesken todistuksen 4

epävarmuus matemaattiseen kirjoittamiseen liittyen 2

epävarmuus ja aiemmat negatiiviset kokemukset 1

Mielenkiinto

mielenkiinto haasteeseen liittyen 17

mielenkiinto ja positiiviset tunteet 13

mielenkiinto ja todistamisen aloitus 7

mielenkiinto ja todistamisen hyödyllisyys 4

mielenkiinto ja negatiiviset tunteet 6

Turhautuminen

turhautuminen kun oma taitotaso ja vaatimukset eivät kohtaa 15

turhautuminen kun todistus ei etene 10

turhautuminen jos todistuksessa alkuun 7

turhautuminen ja merkityksettömyyden kokemus 6

turhautuminen, jos todistusta ei saa valmiiksi 5

turhautuminen ja voimavarojen riittämättömyys 4

turhautuminen matemaattisesta kirjoittamisesta saatuun palautteeseen 1

Neutraali

Tunteitaan neutraaleiksi luonnehtivat 21

Ei tunteita 21

Vastaukset, joissa ei kuvailla tai tunnisteta omia tunteita 13

todistaminen rutiinina 3

Osaaminen ja suorittaminen 2

Innostus tai ei mitään 2

Vaikeus ja hankaluus

Todistamisessa alkuun pääseminen 21

vaikeissa aiheissa/todistuksissa 7

osaaminen ei riitä 6

todistusmenetelmiin liittyvät vaikeudet ja hankaluudet 4

Vaikeudet ja hankaluudet joukkoihin liittyvissä todistuksissa 3

kun todistusta ei saa valmiiksi 3

Onnistuminen

Onnistuminen ja todistuksen valmiiksi saaminen 21

Onnistuminen haasteiden jälkeen 5

Onnistuminen todistusta tehdessä 5

Onnistuminen ja oivallukset 4

Voimakas mielihyvä

Mielihyvä valmiista todistuksesta 14

Mielihyvä pohtimisesta ja oivalluksista 9

Mielihyvä ja onnistuminen 5

Ilo

Onnistumisen ilo 12

Ilo osaamisesta 3

ilo loogisuudesta ja matemaattisesta kirjoittamisesta 3

ilo oivalluksista 2